1 Calcul Différentiel dans $\mathbf{R}^n$

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. On veut étudier des questions de

- continuité,
- dérivabilité,
- différentiabilité;
- leurs applications.

1.1 Propriétés de $\mathbf{R}^n$

1.1.1 $\mathbf{R}^n$ ensemble de points.

Definition 1.1 *L'*espace *(topologique)* $\mathbf{R}^n$ *est l'ensemble des n-uplets de réels* $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $x_i \in \mathbf{R}$, $\quad i = 1, \cdots, n$, *appelés* points.

1.1.2 $\mathbf{R}^n$ espace vectoriel

.

- Vecteurs-colonnes:
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$
- Opérations:
  - addition
  $$X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix},$$
  - multiplication externe
  $$\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

- Vecteur position de x lorsque $\mathbf{R}^n$ est rapporté à un repère $(O; \vec{e}_i)$ d'origine $O = (0, \cdots, 0)$ et de base $(\vec{e}_i)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$:

$$\vec{x} := \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

1.1.3 Topologie asssociée à la norme euclidienne.

Pour évaluer la distance entre deux vecteurs, ou deux points x, y, on utilise la norme euclidienne $|\cdot|$:

$$d(x,y) := |\vec{x} - \vec{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}.$$

Proposition 1.2 *Tout sous-ensemble infini borné Ω de $\mathbf{R}^n$ admet au moins un point d'accumulation, c'est-à-dire un point x pour lequel il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de Ω tels que*

$$\lim_{n\to\infty} |\vec{x}_n - \vec{x}| = 0.$$

Un point $a \in \Omega \subset \mathbf{R}^n$ est intérieur à Ω s'il existe une boule ouverte:

$$B_r(a) = \{x \in \mathbf{R}^n|; |\vec{x} - \vec{a}| < r\} \subset \Omega.$$

Un point $a \in \Omega$ intérieur à Ω est un point d'accumulation. La réciproque est fausse.

1.2 Fonctions $\mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$

Exemple: la représentation paramétrique d'une courbe de $\mathbf{R}^m$.

Pour toute application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$, l'application vectorielle associée $\vec{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ se décompose en

$$\vec{f}(x) = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu(x) \vec{e}_\mu$$

où f_μ est une application $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ est continue en $a \in D_f$ si ses composantes f_μ sont continues en a.

Definition 1.3 *l'application* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ *est dite* différentiable *en* $a \in D_f$ *si* a *est un point d'accumulation de* D_f *et si la limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{(x-a)}(\vec{f}(x) - \vec{f}(a))$$

existe.

Cette limite, quand elle existe, est notée $\vec{f}'(a)$ *et appelée* dérivée de f au point a.

Une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ est dérivable en $a \in D_f$ si toutes ses composantes f_μ sont dérivables en a.

1.3 Fonctions $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Exemples: champ des masses volumiques dans un solide; champ des températures d'un corps à un instant donné.

1.3.1 Continuité.

L'application $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est continue en un point d'accumulation $a \in D_f$ si pour toute suite $a_n \to a$ ($\lim_{n\to\infty} |\vec{a}_n - \vec{a}| = 0$) on a

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a).$$

1.3.2 Différentiabilité.

On rappelle que $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dérivable en $a \in D_f$ si a est intérieur à D_f et si

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)|}{|x-a|} = 0.$$

Definition 1.4 *Une application* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *est différentiable en* $a \in D_f$ *si* a *est un point intérieur à* D_f *et s'il existe une application linéaire* $df_a : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *telle que*

$$\lim_{x\to a} \frac{|f(x) - f(a) - df_a(\vec{x} - \vec{a})|}{|\vec{x} - \vec{a}|} = 0.$$

La forme linéaire

$$df_a : \vec{h} \in \mathbf{R}^n \mapsto df_a(\vec{h}) \in \mathbf{R}$$

est appelée la différentielle de f en a.

Si $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est différentiable en $a \in D_f$, alors elle est continue en a.

Remark 1.5 L'hypothèse 'a point intérieur à D_f assure l'unicité de la différentielle df_a lorsqu'elle existe.

1.3.3 Dérivée directionnelle

Si $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est différentiable en $a \in D_f$, on peut calculer la *dérivée (directionnelle) de f dans la direction de $\vec{u} \neq 0$*:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{u}) - f(a)}{t} = df_a(\vec{u}).$$

Il peut arriver que f non différentiable en $a \in D_f$ admette néanmoins des dérivées directionnelles dans des directions $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Definition 1.6 *Sous réserve de son existence, on appelle* dérivée partielle de f au point $a \in D_f$, *et on note* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, *la dérivée directionnelle de f en a dans la direction du $i$ème vecteur de base $\vec{e}_i$: ($|\vec{e}_i| = 1$)*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) := \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{e}_i) - f(a)}{t} = df_a(\vec{e}_i).$$

Tout $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ est intérieur à $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^n$ est un ouvert). Donc, si $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$, la relation

$$\varphi(\vec{x}) - \varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{x} - \vec{a})$$

et l'unicité de la différentielle en $\vec{a} \in \mathbf{R}^n$ entraînent $d\varphi_{\vec{a}} = \varphi$.

Si $\varphi = p^i : \vec{x} \in \mathbf{R}^n \mapsto x_i$ est la projection sur la $i$ème composante, on note $dp^i_{\vec{a}} = dx_i$ de sorte que

$$df_a(\vec{h}) = \sum_{i=1}^n h_i df_a(\vec{e}_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i \right\}(\vec{h}), \quad \forall \vec{h} \in \mathbf{R}^n,$$

c'est-à-dire:

$$df_a = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i.$$

Theorem 1.7 *Si les dérivées partielles* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $i = 1, \cdots, n$, *de* $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *sont bien définies sur un sous-ensemble* $E \subseteq D_f$ *et si les applications*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : E \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

sont continues sur E, *alors* f *est différenntiable sur* E.

1.3.4 Gradient

Definition 1.8 *Si* $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *est différentiable en* $a \in D_f$, *on appelle* gradient de f au point a *le vecteur:*

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(a) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \vec{e}_i.$$

En particulier:

$$df_a(\vec{h}) = (\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{h}), \quad \forall \vec{h} \in \mathbf{R}^n.$$

Le vecteur gradient est une quantité intrinsèque, qui existe hors de tout système de coordonnées:

Theorem 1.9 (Théorème de Riesz). *Si* $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *est une forme linéaire (continue) sur* $\mathbf{R}^n$, *alors il existe* $\vec{\omega} \in \mathbf{R}^n$, $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, *tel que*

$$\varphi(\vec{h}) = (\vec{\omega} \cdot \vec{h}), \quad \forall \vec{h} \in \mathbf{R}^n.$$

1.3.5 Interprétation géométrique

A toute application $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to R$ on associe son graphe:

$$\{(x, x_{n+1} = f(x)) | \, x \in D_f\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

qui est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^{n+1}$. Si en outre f est différentiable en $a \in D_f$, on peut écrire, dans un voisinage U de a:

$$f(x) = f(a) + (\overrightarrow{\text{grad}} f(a) \cdot \vec{x} - \vec{a}) + \varepsilon(\vec{x} - \vec{a})$$

où

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{\varepsilon(\vec{x} - \vec{a})}{|\varepsilon(\vec{x} - \vec{a})|} = 0.$$

Alors, l'ensemble

$$\left\{\left(x, x_{n+1} = f(a) + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) \cdot \vec{x} - \vec{a})\right) \mid x \in \mathbf{R}^n\right\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

est l'hyperplan (= sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathbf{R}^{n+1}$) de $\mathbf{R}^{n+1}$ tangent au graphe de f en $(a, f(a))$. le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a)$ est le vecteur normal au graphe de f en $(a, f(a))$.

L'hyperplan tangent à la surface $x_{n+1} = f(x)$ généralise la notion de tangente à la courbe $x_2 = f(x_1)$.

1.3.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Si $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to R$ est différentiable sur un ouvert $U \subset D_f$ (tout $x \in U$ est intérieur à U), on peut étudier la continuité et la différentiabilité des applications

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Definition 1.10 *Si* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ *est différentiable en* $a \in U$*, on appelle* dérivée partielle d'ordre 2 de f en $a \in U$ *la quantité*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\bigg|_{x=a}.$$

Si les dérivées partielles d'ordre 2 de $f : D_f \subseteq \mathbf{R}^n \to R$ existent et sont continues sur un ouvert $U \subset \mathbf{R}^n$, alors (**Lemme de Schwartz**):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad \forall x \in U.$$

Ces dérivées partielles continues permettent de définir la diffénerentielle d'odre de 2 de f sur U:

$$d^2 f_a = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) dx_i dx_j : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R},\ (\vec{h}, \vec{k}) \mapsto \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j.$$

La différentielle d'ordre 2 de f and a, notée $d^2 f_a$, est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$.

1.3.7 Applications $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

Tout ce qui a été dit se généralise au cas de $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ d'application vectorielle associée:

$$\vec{f} : D_{\vec{f}} \subseteq \mathbf{R}^n \to R^m, \quad x \mapsto \vec{f}(x) = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu(x)\vec{e}_\mu.$$

Exemples: les champs vectoriels tels que champs de force, champ des vitesses dans l'écoulement d'un fluide à un instant donné.

Une application $f : D_{\vec{f}} \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est différentiable en $a \in D_f$ si ses composantes f_μ sont différentiables en a et alors

$$\vec{df}_a := \sum_{\mu=1}^{m} (df_\mu)_a \vec{e}_\mu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

est une application linéaire $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, de matrice dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$:

$$J_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

appelée *matrice jacobienne de* f au point a.

En particulier:

$$\forall \vec{h} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{df}_a(\vec{h}) = \sum_{\mu=1}^{m} (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f_\mu(a) \cdot \vec{h})\vec{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\mu}{\partial x_i}(a) h_i \right\} \vec{e}_\mu$$

Theorem 1.11 *Soit* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *différentiable en* $a \in D_f$ *et soit* $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^\ell$ *différentiable en* $b = f(a) \in D_g$. *Alors l'application composée* $g \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^\ell$ *est différentiable en* a *de différentielle définie par*

$$\overrightarrow{d(g \circ f)}_a = \vec{dg}_{f(a)} \circ \vec{df}_a.$$

La matrice jacobienne $J_{g\circ f}(a)$ est le 'produit' des matrices jacobiennes de g et f:

$$J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a))J_f(a).$$

Exercise 1.12 Si $n = \ell = 1$, vérifier que

$$(g \circ f)'(a) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_\mu}(f(a)) f'_\mu(a).$$

1.4 Fonctions de $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$. Inversibilité.

D'après la théorie, si une application $f:\,\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 (différentiable et de différentielle $df\,:\,x \mapsto df(x) = df_x$ continue sur D_f) est bijective sur D_f, alors la matrice jacobienne $J_f(x)$ est inversible pour tout $x \in D_f$. Mais la réciproque est en général fausse.

Exercise 1.13 *Soit*

$$D = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 |\ 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

et soit $f:\,D \to \mathbf{R}^2$ *définie par*

$$f(x) = (x_1^2 - x_2^2,\ 2x_1x_2).$$

Calculer $\det J_f(x)$ *pour tout* $x \in D$. *L'application* f *est-elle inversible?*

On peut néanmoins obtenir un résultat local.

Definition 1.14 *Le déterminant* $\det J_f(x)$ *est appelé le* Jacobien *de* f *au point* x.

Theorem 1.15 *Soit* $f:\,\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *une application de classe* C^1 *sur* $D_f \subseteq \mathbf{R}^n$. *Si son Jacobien ne s'annule pas au point* $a \in D_f$, *alors* f *est localement inversible au point* a, *i.e., il existe un ouvert* $U \subseteq D_f$ *contenant* a *tel que* $f|_U : U \to f(U)$ *soit une bijection de* $U \to f(U)$.

Exercise 1.16 Avec les notations du théorème 1.15, vérifier que

$$J_f^{-1}(x) = J_{f^{-1}}(f(x)), \quad \forall x \in U.$$

Exercise 1.17 *Soit* $\varphi:\,\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *de classe* C^1 *sur un domaine* $D_\varphi \subseteq \mathbf{R}^2$ *définie par*

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v))$$

et soit $T \subset D_\varphi$ *tel que* $\varphi|_T \to \varphi(T)$ *soit bijective. Montrer que*

$$dudv = |\det J_\varphi(x)| dx_1 dx_2.$$

Le résultat de l'exercice 1.17 se généralise à $\varphi:\,\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

1.5 Fonctions implicites

Soit $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application de classe C^1 sur D_f.

Question 1.18 A quelle condition sur f l'ensemble

$$\Gamma_f := \{x = (x', x_{n+1}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} |\ f(x) = 0\}$$

est-il le graphe d'une fonction φ? C'est-à-dire: à quelle condition sur f existe-t-il une fonction $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ telle que

$$f(x', x_{n+1}) = 0 \iff x_{n+1} = \varphi(x')?.$$

Theorem 1.19 *Soit $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application de classe C^1 sur D_f. On suppose qu'il existe $a = (a', a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que*

$$f(a) = 0 \quad \textit{avec} \quad \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(a) \neq 0.$$

Alors, il existe un ouvert $U \subset \mathbf{R}^{n+1}$ avec $a \in U$ et un ouvert $W \subset \mathbf{R}^n$ avec $a' \in W$, il existe une unique application $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1 tels que $a_{n+1} = \varphi(a')$ et

$$x = (x', x_{n+1}) \in U \quad \textit{et} \quad f(x) = 0 \iff x' \in W \quad \textit{et} \quad x_{n+1} = \varphi(x').$$

On peut généralier à $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, application de classe C^1 sur D_f.

Question 1.20 *A quelle condition sur f l'ensemble*

$$\Gamma_f := \{x = (x', y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m |\ f(x) = 0\}$$

est-il le graphe d'une fonction φ? C'est-à-dire: a quelle condition sur f existe-t-il une fonction $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ telle que

$$f(x', y) = 0 \iff y = \varphi(x')?$$

Theorem 1.21 *Soit $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ une application de classe C^1 sur D_f. On suppose qu'il existe $a = (a', b) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$ tel que*

$$f(a) = 0 \quad \textit{avec} \quad \det \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a) \neq 0.$$

Alors, il existe un ouvert $U \subset \mathbf{R}^{n+m}$ avec $a \in U$ et un ouvert $W \subset \mathbf{R}^n$ avec $a' \in W$, il existe une unique application $\varphi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ de classe C^1 tels que $b = \varphi(a')$ et

$$x = (x', y) \in U \quad et \quad f(x) = 0 \iff x' \in W \quad et \quad y = \varphi(x').$$

Dans le cas particulier $n = m = 1$, on peut expliciter φ. En effet, en posant $t = x'$, on obtient:

$$\forall t \in W, \quad f(t, \varphi(t)) = 0$$

d'où

$$\forall t \in W, \quad \frac{d}{dt} f(t, \varphi(t)) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(t, \varphi(t))\varphi'(t) = 0$$

ce qui entraîne:

$$\varphi'(t) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(t, \varphi(t))}{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}(t, \varphi(t))}.$$

La condition $a_2 = \varphi(a_1)$ permet de conclure.

Exercise 1.22 Appliquer à la sphère de $\mathbf{R}^3$:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Exercise 1.23 Soit $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$f(t, x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2 - 2t^2, x_1^2 + 2x_2^2 + t^2 - 4).$$

Nature de l'ensemble

$$\{(t, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^3 |\ f(t, x_1, x_2) = 0\}?$$

Comparer avec le graphe d'une fonction.

1.6 Extrema locaux des fonctions $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

Comme dans le cas des fonctions d'une seule variable, la détermination d'extrema locaux de fonctions de plusieurs variables est un problème important.

Exercise 1.24 En s'aidant du graphe de la fonction considérée, déterminer les extrémas de

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2$$

$$f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, \quad x = (x_1, x_2) \mapsto f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$

Theorem 1.25 *Si une application différentiable $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ admet un extremum en $c \in D_f$, alors*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(c) = \vec{0}.$$

La réciproque est fausse en général.

Definition 1.26 *On appelle* point critique *d'une application différentiable $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ tout $x \in D_f$ solution de*

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(x) = \vec{0}.$$

Le théorème 1.25 dit que les extrema d'une application différentiable $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont à chercher *parmi* les points critiques de f.

Exercise 1.27 *Déterminer les points critiques de $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$. Comparer avec ses extrema.*

On peut énoncer une *condition suffisante* d'extremum si f est deux fois différentiable.

Definition 1.28 *Si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est deux fois différentiable, on appelle* matrice hessienne *de f la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 de f et* hessien *le déterminant de cette matrice.*

On pose:

$$\Delta_k(x) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(x) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_1}(x) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) \end{pmatrix}$$

Theorem 1.29 *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^2 sur un voisinage ouvert U de $c \in D_f$. Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(c) = \vec{0}$ et si $\Delta_k(c) > 0$, $k = 1, \cdots, n$, alors f admet un minimum local strict au point c.*

Si $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(c) = \vec{0}$ et si $(-1)^k \Delta_k(c) > 0$, $k = 1, \cdots, n$, alors f admet un maximum local strict au point c.

Exercise 1.30 *Enoncer le théorème 1.29 pour $n = 2$.*

1.6.1 Extrema sous contraintes

En pratique, on doit souvent résoudre le problème: si $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une application de classe C^1 sur D_f, trouver les extrema de sa restriction au sous-sensemble

$$S = \{x \in D_f |\ g(x) = 0\}$$

où l'application $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ est de classe C^1 sur D_f.

Exercise 1.31 Maximiser le volume d'un parallélépipède rectangle sous la contrainte que sa surface ait une aire donnée.

En utilisant le théorème des fonctions implicites, on obtient la *condition nécessaire* d'existence d'un extremum local sous la contrainte $g = 0$.

Definition 1.32 *On appelle* rang *d'une matrice $A \in \mathbf{R}^{n,m}$ représentant une application linéaire $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ dans les bases canoniques de $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$, la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^m$ engendré par les vecteurs colonnes de A.*

Pratiquement, c'est la dimension de la plus grande matrice (carrée) inversible que l'on puisse extraire de A.

Theorem 1.33 *Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et soit $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $m \leq n$, deux fonctions de classe C^1 sur un ouvert $D \subseteq \mathbf{R}^n$. Si f admet un extremum local sous les contraintes*

$$g_\mu(x) = 0, \quad \mu = 1, \cdots, m$$

en $a \in D$ et si la matrice jacobienne $J_g(x)$ est de rang m (maximal) pour tout $x \in D$, alors il existe m constantes $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ telles que a soit un point critique de

$$F(x_1, \cdots, x_n, \lambda_1, \cdots, \lambda_m) := f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda_\mu g_\mu(x_1, \cdots, x_n).$$

1.7 Interprétation du gradient.

Definition 1.34 *On appelle* champ de vecteurs *toute application*

$$\vec{f}: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad x \mapsto \vec{f}(x) = \sum_{\mu=1}^{m} f_\mu(x)\vec{e}_\mu.$$

Par extension, un champ de scalaires est un champ de vecteurs pour lequel $m = 1$.

Exercise 1.35 Le champ d'attraction newtonienne créé par une masse unitaire placée en O en un point x est de la forme

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}}{r^3}\vec{x}, \quad r = |\vec{x}|,$$

où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation universelle. Vérifier que $\vec{g} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi(x)$ pour une fonction $\varphi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Definition 1.36 *On appelle* ligne de champ *d'un champ de vecteurs non nuls $x \mapsto \vec{h}(x)$ toute courbe dont la tangente en x est dirigée par $\vec{h}(x)$.*

Definition 1.37 *On appelle* courbe de niveau*, resp.*surface de niveau*, d'une applicaton $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, resp. $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, tout ensemble de la forme*

$$\Gamma_a = \{x \in \mathbf{R}^2 \quad \textit{(resp. } x \in \mathbf{R}^n\textit{)} |\ f(x) = a\}, \quad a \in \mathbf{R}.$$

Exercise 1.38 Justifier les expressions 'courbe de niveau', 'surface de niveau'.

Exercise 1.39 Montrer que pour un champ de gradients $\overrightarrow{f}$, les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces de niveau $f(x) =$ constante. Décrire les lignes de champ du champ d'attraction newtonienne.

2 Intégrales multiples

2.1 Intégrations successives. Calcul de volumes. Changements de variables.

Les théorèmes d'existence ainsi que les règles d'intégration ne donnent pas de méthodes pratiques pour calculer les intégrales de fonctions de plusieurs variables. On a aussi intérêt à relier ce calcul à la théorie de l'intégration des fonctions *d'une seule* variable. ceci est possiblepour une classe particulière de fonctions qui représente la majorité des cas rencontrés dans la pratique. L'intégrale de Riemann se ramène alors à des intégrations successives.

2.1.1 Domaine régulier, intégrale double.

Definition 2.1 *Soit* $\varphi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}$ *et* $\psi_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}$ *deux fonctions continues vérifiant*

$$\varphi_1(x_1) \leq \psi_1(x_1), \quad \forall x_1 \in [a_1, b_1].$$

L'ensemble de points

$$\{(x_1, x_2) |\, x_1 \in [a_1, b_1],\ x_2 \in [\varphi_1(x_1), \psi_1(x_1)]\}$$

est appelé domaine régulier (ou domaine simple) pour l'axe x_1 *(faire un dessin).*

La définition d'un domaine régulier pour l'axe x_2 est analogue.
Le théorème suivant est fondamental:

Theorem 2.2 *Soit* f
, $D_f \to \mathbf{R}$ *une fonction continue telle que* D_f *soit un domaine régulier pour l'axe* x_1*. Alors* f *est Riemann-intégrable et*

$$\int_{D_f} f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\varphi_1(x_1)}^{\psi_1(x_1)} f(x_1, x_2) dx_2 \right) dx_1.$$

Exercise 2.3 Appliquer avec

$$\varphi_1(x_1) = 0, \quad \psi_1(x_1) = \sqrt{R^2 - x_1^2}, \quad f(x_1, x_2) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}.$$

Interpréter.

Application: calcul de volumes.

2.1.2 Changement de variables

La règle de changement de variables pour l'intégrale d'une fonction d'une seule variable donne sous les conditions usuelles (φ de classe C^1, strictement monotone avec $\varphi'(x) > 0$ ou $\varphi'(x) < 0$ sur $[a, b]$):

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt.$$

Cette ransformation de l'intégrale a son équivalent pour l'intégrale de Riemann en dimension 2:

Theorem 2.4 *Etant donné une fonction $f : D_f \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ continue, prolongeable par continuité à ∂D_f, une fonction $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ de classe C^1 sur un domaine $D_\varphi \subset \mathbf{R}^2$ définie par*

$$(u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \varphi_1(u, v) \\ \varphi_2(u, v) \end{pmatrix},$$

un domaine mesurable $T \subset D_\varphi$ tel que la restriction $\varphi|_T : T \to D_f$ est bijective et dont le jacobien $\dfrac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}$ ne s'annule pas sur T, on a

$$\int_{D_f} f(x)dx = \int_T (f \circ \varphi)(u, v) \left| \frac{D(\varphi_1, \varphi_2)}{D(u, v)}(u, v) \right| dudv. \tag{1}$$

Remark 2.5 La règle de changement de variable énoncée au théorème 2.4 sétend sans autre condition à $\mathbf{R}^3$ et à $\mathbf{R}^n$.

L'effet de la fonction φ peut être interpréter comme le passage de cordnnées cartésiennes à des *coordonnées curvilignes* dans D_f. Un cas particulier classique est le passage aux *coordonnées polaires* par

$$x_1 = r \cos \alpha, \quad x_2 = r \sin \alpha, \quad r \geq 0.$$

Les conditions du théorème 2.4 sont remplies dès que $f : D_f \to \mathbf{R}$ est continue et D_f est un compact que ne contient pas l'origine (pour éviter la singularité en 0). On a alors (voir (2))

$$\int_{D_f} f(x)dx = \int_T (f \circ \varphi_P)(r, \alpha) r dr d\alpha.$$

où

$$\varphi_P(r, \alpha) = \begin{pmatrix} r \cos \alpha \\ r \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad r > 0.$$

Si D_f contient l'origine, on coupe D_f avec un disque $B_\rho(0)$ et on considère $D_f \setminus B_\rho(0)$. ave cet ensemble de définition, le théorème 2.4 est à nouveau utilisable. Le passage à la limite $\rho \to 0$ valide la formule de transformation ci-dessus dans le cas où D_f contient l'origine.

2.2 Longueurs d'arcs

2.2.1 Courbes C^1 de $\mathbf{R}^2$ en représentation explicite.

La courbe est alors le graphe d'une fonction de classe C^1 $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto f(x)$. On appelle *abscisse curviligne* le long de la courbe $y = f(x)$ la fonction $s : x \mapsto s(x)$ de différentielle:

$$ds(x) = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + f'(x)^2}$ est continue sur $[a, b]$, la longueur L_f de la courbe est bien définie si on pose

$$L_f := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

2.2.2 Courbes C^1 en représentation paramétrique.

Soit $C : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ la courbe définie par

$$t \mapsto \mathbf{k}(t) = \begin{pmatrix} k_1(t) \\ k_2(t) \\ k_3(t) \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{k} : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ est de classe C^1.

Le même raisonnement conduit à définir l'abscisse curviligne par

$$ds(t) = \sqrt{dk_1(t)^2 + dk_2(t)^2 + dk_3(t)^2} = \sqrt{k_1'(t)^2 + k_2'(t)^2 + k_3'(t)^2}dt = \|\mathbf{k}'(t)\|dt,$$

et la longueur de la courbe est alors donnée par

$$L_f = \int_a^b \|\mathbf{k}'(t)\|dt.$$

3 Séries de Fourier

La décomposition d'une vibration en une somme de vibrations élémentaires (ou harmoniques) pose naturellement le problème de la représentation d'une foncion par ne série trigonométrique.

3.1 Séries trigonométrioques. Système trigonométrique orthogonal. Séries de Fourier

Definition 3.1 *On appelle série trigonométrique (réelle) toute série de fonctions*

$$\sum u_n, \quad u_n(x) = a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x), \quad x \in \mathbf{R},$$

où $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *et* $\{\omega_n\}$ *sont des suites de réels.*

On considérera dans tout ce chapitre les séries triogonométriques de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{2}$$

où $l > 0$ est un nombre réel fixé.

Les résultats sur les séries de fonctions s'appliquent évidemment aux séries trigonométriques.

En particulier, si la série $\sum |a_n| + |b_n|$ converge, la série trigonométrique converge absolument et uniformément sur $\mathbf{R}$ puisque:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |a_n \cos(\omega_n x) + b_n \sin(\omega_n x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Example 3.2 La série $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ converge absolument et uniformément sur $\mathbf{R}$.

Definition 3.3 *Pour* $l > 0$ *fixé, la suite de fonctions*

$$1, \quad \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \ \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \cdots, \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \ \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \cdots \tag{3}$$

est appelée système trigonométrique.

Naturellement, toutes les fonctions de cette suite admettent la période commune $2l$.

3.1.1 Orthogonalité

Le système trigonométrique possède la propriété suivante (dite propriété d'orthogonalité): $\forall n, m$,

$$\int_{-\ell}^{+\ell} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx$$

$$= \int_{-l}^{+l} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ l & \text{si} \quad n = m \end{cases} \tag{4}$$

$$\int_{-l}^{+l} \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{\ell}\right) dx = 0.$$

Vérification immédiate par calcul direct.

On traduit les relations (4) en disant que le système trigonométrique est orthogonal sur $[-l, +l]$. Il est facile de voir que le système (3) est en, fait orthogona sur tout intervalle de longueur $2l$. Cela peut résulter d'un calcul direct ou se déduire par exemple de la proposition suivate, utile pour la suite.

Proposition 3.4 *Soit* $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction péeriodique de période* $2l$ *localement intégrable (i.e. intégrable sur une période). Alors*

$$\forall a \in \mathbf{R} : \quad \int_a^{a+2l} g(t)dt = \int_0^{2l} g(t)dt = \int_{-\ell}^{\ell} g(t)dt.$$

Definition 3.5 *Soit* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *une fonction péeriodique de période* $2l$ *localement intégrable. La série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

définie par

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

est appelée série de Fourier *de* f *(suivant le système (3)). Les nombres* a_n*,* b_n *sont les coefficients de Fourier de* f *(suivant le système (3)).*

La série de Fourier de f est attachée à f d'une façon intrinsèque.

Remark 3.6 Pour voir la raison de l'apparition des coefficients (5), considérons une série trigonométrique (2) convergenat uniformément sur $\mathbf{R}$. Soit f sa somme; f est continue et périodique de période $2l$. Multiplions l'égalité

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

successivement par chacune des fonctions du sytème (3), ce qui ne modifie pas la convergence uniforme de la série, ety intégrons les résultats terme à terme sur $[-l, +l]$. Un calcul élémetiare donne, compte tenu de l'orthogonalité (4):

$$\int_{-l}^{+l} f(t) \cos\left(\frac{m\pi t}{\ell}\right) dt = a_m l, \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\int_{-l}^{+l} f(t) \sin\left(\frac{m\pi t}{\ell}\right) dt = a_m l, \quad m = 1, 2, \cdots$$

d'où les relations (5).

Remark 3.7 On vient de démontrer qu'une série trigonométrique (2) uniformément convergente sur $\mathbf{R}$ est une série de Fourier de sa somme. Cependant, il ne faut pas croire que toute série trigonométrique (2), même partout convergente, est une série de Fourier. Par exemple, on montre que la série $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$ est partout convergente sur $\mathbf{R}$, mais ce n'est pas une série de Fourier car sa somme n'est pas localement intégrable (ni même localement sommable au sens de Lebesgue).

Par contre, toute série entière convergente est une série de Taylor de sa somme.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction péeriodique de période $2l$ localement intégrable. Associons à f sa série de Fourier. Nous allons étudier le problème suivant:

- A quelles conditions sur f sa série de Fourier est-elle convergente?
- Si la série de Fourier de f converge, à quelles conditions sa somme coïncide-t-elle avec f?

Pour simplifier le langage, on adoptera la convention suivante.

Notation 3.8 Une fonction f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est dite de classe $\mathbf{R}_{2\ell}$ si f est localement Riemann-intégrable sur $\mathbf{R}$ et périodique de période $2l$.

3.2 Sommes partielles d'une série de Fourier. Noyau de Dirichlet

Lemma 3.9 *Soit $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$ et soit $s_n(f)$ la n ième somme partielle de sa série de Fourier. Alors*

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{\ell} f(x+t)D_n(t)dt,$$

où

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k\pi t}{\ell}\right) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{\ell}}{2\sin\frac{\pi t}{2\ell}} & si \quad t \notin 2\ell\mathbf{Z} \\ n+\dfrac{1}{2} & si \quad t \in 2\ell\mathbf{Z} \end{cases}$$

$D_n(t)$ *est appelé le* noyau de Dirihlet.

Remark 3.10 Ls fonctions f et D_n étant périodiques de période 2ℓ, on peut encore écrire:

$$s_n(f)(x) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} \left(f(x+t) - f(x-t)\right) D_n(t)dt.$$

Ceci résulte de l'expresion de $s_n(f)$ dans le lemme 3.9 en y faisant la décomposiition

$$\int_{-\ell}^{+\ell} = \int_{-\ell}^{0} + \int_0^{\ell}$$

et en y opérant le changement de variable $\tau = -t$ dans $\int_{-\ell}^{0}$.

3.3 Lemme de Riemann

Lemma 3.11 *Soit $g : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable. Alors*

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin\lambda t dt = \lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos\lambda t dt = 0.$$

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe une subdivision $d = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ de $[a,b]$ telle que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta t_i - \int_a^b g(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (\Delta t_i = t_i - t_{i-1}). \tag{6}$$

Considérons la fonction en escaliers $g_\varepsilon : [a,b] \to \mathbf{R}$ définie par

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} M_1 & \text{si} \quad t \in [t_0, t_1], \\ M_i & \text{si} \quad t \in [t_{i-1}, t_i], \quad i = 2, \cdots, n. \end{cases}$$

Evidemment $g_\varepsilon \geq g$ et (6) peut s'écrire:

$$\int_a^b (g_\varepsilon - g) dt < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{7}$$

On a donc ($\lambda > 0$)

$$\int_a^b g_\varepsilon \cos \lambda t dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \cos \lambda t dt$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} M_i (\sin \lambda_i t - \sin \lambda t_{i-1}) \to 0 \quad \text{quand} \quad \lambda \to +\infty.$$

Par suite, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que

$$\forall \lambda > \lambda_0 : \quad \left| \int_a^b g_\varepsilon \cos \lambda t dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Donc, pour tout $\lambda > \lambda_0$, on a d'après (7) et (8)

$$\left| \int_a^b g(t) \cos \lambda t dt \right| \leq \int_a^b (g_\varepsilon - g) dt + \left| \int_a^b g_\varepsilon \cos \lambda t dt \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

On établit de façon analogue que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b g_\varepsilon \sin \lambda t dt = 0.$$

■

Evidemment, le leme reste vrai quand $\lambda \to -\infty$.

3.4 Convergence d'une série de Fourier en un point. Principe de localisation

Soit $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$ et x_0 un point fixé quelconque. D'après le lemme 3.9 et la remarque associée, on peut écrire:

$$s_n(f)(x_0) = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x_0 + t) D_n(t) dt = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} (f(x_0 + t) - f(x_0 - t)) D_n(t) dt.$$

Le problème de la convergence de la série de Fourier de f en x_0 est alors ramené à l'étude de la dernière intégrale quand $n \to +\infty$.

Soit $\delta > 0$, $0 < \delta < \ell$. La fonction

$$t \mapsto \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{\pi t}{2\ell}}$$

étant intégrable sur $[\delta, \ell]$, on a, d'après le lemme de Riemann:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\delta}^{\ell} \left(f(x_0 + t) - f(x_0 - t) \right) D_n(t) dt =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \int_{\delta}^{\ell} \left[\frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{\pi t}{2\ell}} \right] \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi t}{\ell} dt = 0.$$

la suite $\{s_n(f)(x_0)\}$ est donc convergente ssi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{\delta} \left(f(x_0 + t) - f(x_0 - t) \right) D_n(t) dt$$

existe quel que soit δ, $0 < \delta < \ell$.

On a ainsi démontré la proposition suivante, appelée 'principe de localisation'.

Proposition 3.12 *La série de Fourier de f converge en x_0 vers la valeur α ssi:*

$$\forall \delta, \quad 0 < \delta < \ell : \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\ell} \int_0^{\delta} \left(f(x_0 + t) - f(x_0 - t) \right) D_n(t) dt = \alpha.$$

Il en résulte que le comportement de la série de Fourier de f en x_0 ne dépend que des valeurs de f dans un voisinage $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ arbitrairement petit et non du comportement global de f.

Si deux fonctions (localement intégrables et de même période) coïncident dans $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, alors leurs séries de Fourier convergent ou divergent simultanément en x_0. S'il y a convergence, elles on alors la même somme en x_0.

Cette conséquence s'énonce encore en disant qu'on peut modifier f arbitrairement (mais en conservant l'intégrabilité locale et la périodicité) sans affecter la convergence (ni la somme) de la série de Fourier en x_0. On notera encore que la somme de la série de Fourier de f en x_0 peut être distincte de $f(x_0)$. Au paragraphe suivant, on indiquera des conditions pour que cette somme soit égale à f.

3.5 Problème de la représentation d'une fonction par sa séire de Fourier

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème fondamental.

Theorem 3.13 (**Dini**). *Soit $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$. Si f vérifie au point x_0 les conditions suivantes*

1. $f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *existent,*
2. $\exists \delta > 0$ *tel que*

$$\int_0^\delta \frac{1}{t} \left| f(x_0+t) - f(x_0-t) - f(x_0+0) + f(x_0-0) \right| dt < +\infty,$$

alors la série de fourier de f converge au point x_0 vers la valeur

$$\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0)).$$

On utilise souvent un cas particulier du théorème de Dini. Il sénonce sous la forme pratique suivante.

Theorem 3.14 *Soit $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$. Si f vérifie au point x_0*

1. $f(x_0+0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$, $f(x_0-0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ *existent,*
2. *les limites (finies):* $f'(x_0+0) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0+0)}{x - x_0}$, $f'(x_0-0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0-0)}{x - x_0}$ *existent. Alors la série de Fourier de f converge en x_0 vers la valeur*

$$\frac{1}{2}\left(f(x_0+0) + f(x_0-0)\right).$$

Remark 3.15 la discontinuité n'est pas forcément la raison qui empêhe la représentation d'une fonction pa sa série de Fourier. On a construit au siècle dernier un exemple (Du Bois- Raymond) d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge sur un ensemble non dénombrable.

Remark 3.16 En général, le problème de la convergence ponctuielle d'une série de Fourier est rès compliqué. Par exemple, la question suivante est demeurée longtemps sans réponse:

- *Soit f une fonction périodique continue. Existe-t-il au moins un point x_0 où la série de Fourier de f est convergente vers $f(x_0)$?*

Ce n'est que récemment qu'on a pu montrer que la réponse était affirmative. Elle découle du résultat suivant, dû à L.Carleson (1966):

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique e période 2ℓ et de caré localement somable, i.e localement intégrable au sens de Lebesgue:

$$\int_{-\ell}^{+\ell} f^2 dx < +\infty.$$

Alors, la série de Fourier de f converge vers f partout dans $[-\ell, \ell]$, sauf sur un ensemble de mesure nulle (et en tant que fonction périodique, elle converge patout sur $\mathbf{R}$ exceopté sur un ensemble négligeable de $\mathbf{R}$). San entrer dans les détails, on notera que toute fonction $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$ (ou périodique et continue) est de carré localemnt smable. Donc sa série de Fourier converge vers f partout sur $\mathbf{R}$ sauf sur un ensemble négligeable.

On notera par contre qu'il exuste des fonctions périodiques localement sommables, i.e. localement intégrables au sens de Lebesgue:

$$\int_{-\ell}^{+\ell} |f| dx < +\infty$$

dont la série diverge partout sur $\mathbf{R}$ (résultat dû à A.N. Kolmogorov).

3.6 Développement en série de Fourier des fonctions définies sur un intervalle.

Par définition, développer une fonction f en série de Fourier c'est représenter f par une série de Fourier. On considère souvent des fonctions qui ne sont définies que sur u intervalle $[\alpha, \beta]$ et on pose la question de savoir si ces foncions peuvent être développées en série de Fourier. On peut fournit une réponse à ce problème en utilisant par exemple le résultat suivant.

Theorem 3.17 *Soit $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable vérifiant les hypothèses suivantes.*

1. $\forall x \in [\alpha, \beta]$, les valeurs $f(x-0)$ et $f(x+0)$ existent;

2. $\forall x \in [\alpha, \beta]$, les valeurs finies $f'(x-0)$ et $f'(x+0)$ existent;

(Naturellement, aux points α, β, il s'agit uniquement des valeurs $f(\alpha+0)$, $f(\beta-0)$, $f'(\alpha+0)$, $f'(\beta-0)$).

Alors

1. $\forall x \in [\alpha, \beta]$,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi x}{\beta-\alpha}\right) \tag{9}$$

2. Pour α ou β, on a

$$\begin{aligned}\frac{f(\alpha+0)+f(\beta-0)}{2} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi\alpha}{\beta-\alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi\alpha}{\beta-\alpha}\right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi\beta}{\beta-\alpha}\right) + b_n \sin\left(\frac{2n\pi\beta}{\beta-\alpha}\right) \qquad (10)\end{aligned}$$

où

$$a_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\cos\frac{2n\pi t}{\beta-\alpha}dt$$
$$b_n = \frac{2}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)\sin\frac{2n\pi t}{\beta-\alpha}dt$$

Proof. Le principe de la d'emonstration consiste à se ramener aux hypothèses du théorème 3.14 en associant à f la fonction $\tilde{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$\tilde{f}(x) = f\left(x - \alpha - \left[\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\right](\beta-\alpha)\right),$$

où la notation habituelle $[y]$ désigne la partie entière de y. on voit aisément que $\tilde{f}$ est localement intégrable, périodique de période $\beta-\alpha$ et coniïncie avec f sur $[\alpha, \beta[$.

On dit que $\tilde{f}$ est *le prolongement par périodicité* de f de l'intervalle $[\alpha, \beta[$ sur $\mathbf{R}$. ■

3.7 Séries de Fourier des fonctions paires ou impaires

On vérifie facilement que $\int_{-a}^{a} g(t)dt = 0$ si g st intégrable et impaire.

Il en résulte que si $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$, alors
f est impaire $\Rightarrow$ la fonction $t \mapsto f(t) \cos \dfrac{\pi n t}{\ell}$ est impaire $\Rightarrow a_n = 0$,
f est paire $\Rightarrow$ la fonction $t \mapsto f(t) \sin \dfrac{\pi n t}{\ell}$ est impaire $\Rightarrow b_n = 0$,
pour tout n.

Autrement dit, la série de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire) ne continet que des cosinus (resp. sinus).

Exercise 3.18 Calculer les séries de Fourier des prolongements pair et impair sur $\mathbf{R}$ de f périodique de période 2π définie par

$$f(x) = \pi - x, \quad \forall x \in [0, \pi].$$

3.8 Ordre infinitésimal des coefficients de Fourier

Nous allons examiner brièvement quelques cas simples.

1. Si $f : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}$ est intégrable, aors d'après le lemme de Riemann

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \cos \frac{2\pi t}{b-a} dt \to 0,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(t) \sin \frac{2\pi t}{b-a} dt \to 0,$$

quand $n \to +\infty$. Ainsi

$$f \in \mathbf{R}[a, b] \Rightarrow a_n = o(1) \quad \text{et} \quad b_n = o(1).$$

2. Supposons $f \in C^1([a, b])$. Une intégration par parties donne

$$a_n = \left[\frac{1}{\pi n} f(t) \sin \frac{2n\pi t}{b-a} \right]_a^b - \frac{1}{\pi n} \int_a^b f'(t) \sin \frac{2n\pi t}{b-a} dt, \tag{11}$$

$$b_n = \left[-\frac{1}{\pi n} f(t) \cos \frac{2n\pi t}{b-a} \right]_a^b + \frac{1}{\pi n} \int_a^b f'(t) \cos \frac{2n\pi t}{b-a} dt, \tag{12}$$

Si $f(a) = f(b)$, alors les premiers termes dans (11), (12) s'annulent et on a (d'après le lemme de Riemann):

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Si $f(a) \neq f(b)$, alors au moins un des deux premiers termes dans (11), (12) est non nul, d'où

$$|a_n| + |b_n| = o\left(\frac{1}{n}\right).$$

3. On aura de même

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{13}$$

si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ possède un nombre infini de points de discontinuité et est de classe C^r $(r \geq 1)$ par morceaux, ce qui signifie quil existe une subdivision

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

telle que toute fonction

$$f_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbf{R}, \quad i = 1, \cdots, m$$

définie par

$$f_i(x) = \begin{cases} f(x_{i-1} + 0) & \text{si} \quad x = x_{i-1}, \\ f(x_i - 0) & \text{si} \quad x = x_i, \\ f(x) & \text{si} \quad x_{i-1} < x < x_i \end{cases}$$

est de classe C^r. La relation (13) tient à la présence des points de discontinuité de f (qui sont évidemment de première espèce). Remarquons aussi que de telles fonctions v'erifient sur $[a, b]$ le shypothèses du théorème 3.17.

4. Il est donc intéressant de considérer les fonctions p+'eriodiques dérivables.

Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction périodique de période 2ℓ et de classe C^r $(r \geq 1)$. Alors, toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont encore périodiques et de même période 2ℓ. En effectuant r intégrations par parties dans

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{+\ell} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)dt,$$

on obtient les relations

$$a_n = -\frac{\ell}{\pi n}b'_n = -\frac{\ell^2}{(\pi n)^2}a"_n, \cdots$$

$$b_n = \frac{\ell}{\pi n}a'_n = -\frac{\ell^2}{(\pi n)^2}b"_n, \cdots$$

où a'_n,b'_n,$a"_n$,$b"_n$, $\cdots$ sont les coefficients de Fourier de f', $f"$, $\cdots$ (jusqu'à l'ordre r).

Il en résulte

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad b_n = o\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

3.9 Sommation des séries de Fourier au sns de Cesaro. Théorème de Weierstrass

Comme nous l'avons indiqué, en général, la série de Fourier d'une fonction f ne converge pas vers f partout, même si f est continue.

Une méthode de sommation des séries, due à Cesàro, permet de doner un sens à la somme de certaines séries divergentes. Elle consiste à associer à une série $\sum u_n$ la suite $\{\sigma_n\}$ définie par

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k, \quad n \geq 1$$

où $\{s_n\}$ est la suite des sommes partielles de $\sum u_n$.

Definition 3.19 *Si la limite (finie) $\sigma = \lim_{n\to\infty}\sigma_n$ existe, on dit que $\sum u_n$ converge au sens de Cesàro (ou est C-sommable) vers σ.*

On démontre facilement que

$$lim_{n\to\infty}s_n = A \Rightarrow lim_{n\to\infty}\sigma_n = A$$

la réciproiqie est inexacte, commele montre la série divergente

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

qui converge vers $\frac{1}{2}$ au sens de Cesàro.

On va appliquer cette méthode aux séries de Fourier.

Soit $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$. Posons

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_k(f)(x),$$

où $\{s_n(f)(x)\}$ est la suite des sommes partielles de la série de fourier de f en x.

Theorem 3.20 (Fejér). *Soit $f \in \mathbf{R}_{2\ell}$. On a les assertions suivantes:*

1. *Si f est continue en x, alors $\sigma_n(f)(x) \to f(x)$.*
2. *Si f est continue en tout point de $[\alpha, \beta]$, alors $\sigma_n(f)(x) \to f(x)$ uniformément sur $[\alpha, \beta]$.*

Proof.

1. En partant de la formule

$$s_k(f)(x) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x+t)D_n(t)dt,$$

IOn obtient sans peine:

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x+t)F_n(t)dt$$

où

$$F_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi t}{\ell}}{2n\sin\frac{\pi t}{2\ell}} = \frac{1}{2n}\left(\frac{\sin\frac{\pi n t}{2\ell}}{\sin\frac{\pi t}{2\ell}}\right)^2.$$

F_n s'appelle le *noyau de fejér*.

Observons encore que F_n est paire, ≥ 0, et, comme

$$F_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$$

on a encore

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} F_n(t)dt = 1.$$

Considérons maintenant

$$\sigma_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell} \left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] F_n(t)dt. \quad (14)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x, il existe $\delta > 0$ ($\delta < \ell$) tel que

$$\forall t, \quad 0 \leq t \leq \delta : \ |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| < \varepsilon.$$

On a alors

$$\forall n : \left|\frac{1}{\ell}\int_0^{\delta} \left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] F_n(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\ell}\int_0^{\delta} F_n(t)dt \leq \frac{\varepsilon}{\ell}\int_0^{\ell} F_n(t)dt = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (15)$$

D'autre part, comme

$$F_n(t) \leq \frac{1}{2n\left(\sin\frac{\pi\delta}{2\ell}\right)^2} \quad \text{sur} \quad [\delta, \ell],$$

on a

$$\frac{1}{\ell}\left|\int_{\delta}^{\ell} \left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] F_n(t)dt\right|$$

$$\leq \frac{1}{2n\left(\sin\frac{\pi\delta}{2\ell}\right)^2}\int_{\delta}^{\ell} |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|dt$$

$$\leq \frac{2M}{2n\left(\sin\frac{\pi\delta}{2\ell}\right)^2} \to 0 \quad (16)$$

quand $n \to \infty$ (où $M = \sup_{\mathbf{R}}|f|$).

Il existe n_0 tel que

$$\forall n > n_0 : \quad \frac{1}{\ell}\left|\int_{\delta}^{\ell} \left[f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right] F_n(t)dt\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (17)$$

Finalement, les relations (20) et (17) impliquent

$$\forall n > n_0 : \quad |\sigma_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\ell}\left|\int_0^{\delta}\cdots\right| + \frac{1}{\ell}\left|\int_{\delta}^{\ell}\cdots\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad (18)$$

ce qui montre la première partie.

2. supposons maintenant f continue sur $[\alpha, \beta]$. Soit $\varepsilon > 0$. Du fait que la restriction $f|_{[\alpha,\beta]}$ de f à $[\alpha, \beta]$ es uniformément continue sur $[\alpha, \beta]$ et que f est continue en α et en β, on déduit facilement qu'il existe $\delta > 0$ ($\delta < \ell$) tel que

$$\forall x \in [\alpha, \beta], \quad \forall t,\ |t| < \delta : |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, la relation (20) est vérifiée à la fois pour tous les $x \in [\alpha, \beta]$. On remarque ensuite que (16) ne dépend en fait que de δ (et non de x), donc on peut trouver un n_0 tel qu'on ait (17) indépendamment de $x \in \mathbf{R}$. On achève comme dans (18), la majoration étant vraie à la fois pour tout $x \in [\alpha, \beta]$ d'où la deuxième affirmation.

■

Corollary 3.21 *Si une fonction périodique $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est partout continue, alors*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{R}} |\sigma_n(f)(x) - f(x)| = 0$$

(convergence uniforme de la suite $\{\sigma_n(f)\}$ sur $\mathbf{R}$ vers f.

Corollary 3.22 *Si tous les coefficients de Fourier d'une fonction continue périodique f sont nuls, alors $f = 0$.*

Proof. On a $\sigma_n(f) = 0$ pour tout n. ■

Ceci montre que dans l'espace des fonctions continues, l'application qui à f associe sa série de Fourier est injective (résultat valable dans $\mathbf{R}_{2\ell}$, mais la démonstration sort du cadre de ce cours.)

Theorem 3.23 (Weierstrass). *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il exist un polynôme algébrique P tel que*

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Proof. On prolonge f sur $[2a - b, b]$ de façon paire, i.e. en posant

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } \ a \le x \le b, \\ f(2a - x) & \text{si } \ 2a - b \le x < a. \end{cases}$$

La fonction f_1 est évidemment continue et vérifie $f_1(2a-b) = f_1(b)$. Elle est donc prolongeable sur $\mathbf{R}$ e une fonction continue $\tilde{f}_1$ périodique de période $2(b-a)$.
Soit $\varepsilon > 0$. d'après le Corollaire 3.21, il existe il existe $\sigma_n(\tilde{f}_1)$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R} : |\tilde{f}_1(x) - \sigma_n(\tilde{f}_1)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{19}$$

Observons maintenant que $\sigma_n(\tilde{f}_1)$ est un polynôme trigonométrique, i.e. qu'elle s'écrit sous la forme

$$\sigma_n(\tilde{f}_1)(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \cos\frac{k\pi x}{b-a} + B_k \sin\frac{k\pi x}{b-a}.$$

les fonctions cos et sin étant dévelopabls en séries de Taylor sur $\mathbf{R}$, on en conclut que $\sigma_n(\tilde{f}_1)$ est encore dévelopable en série de taylor convergeant uniformément sur chaque intervalle compact, notamment sur $[a, b]$. Il existe donc un polynôme algébrique P (somme partielle dela série de taylor de $\sigma_n(\tilde{f}_1)$) tel que

$$\forall x \in [a, b] : |P(x) - \sigma_n(\tilde{f}_1)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Compte tenu du fait que $\tilde{f}_1(x) = f(x)$ pour $x \in [a, b]$, les relations (19) et (20) impliquent

$$\begin{aligned}\forall x \in [a, b] : |f(x) - P(x)| &\leq |f(x) - \sigma_n(\tilde{f}_1)| + \\ &+ |\sigma_n(\tilde{f}_1) - P(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Evidemment, on peut formuler le théorème de Weierstrass sous la forme suivante.

Theorem 3.24 *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, il existe une suite de polynômes algébriques $\{P_n\}$ convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Observons que l'on vien de démontrer aussi le résultat suivant.

Theorem 3.25 *Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors, il existe une suite de polynômes trigonométriques convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$.*

Remark 3.26 L'hypothèse 'intervalle fermé' est essentielle pour la validité du théorème de Weiierstrass.

Par exeemple, la fonction $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ est continue sur $]0,1]$ mais elle ne peut être approchée uniformément sur $]0,1]$ par des polynômes.

En effet, soit $0 < \varepsilon < 1$. Supposons qu'il existe un polynôme P tel que

$$\sup_{x\in]0,1]} |f(x) - P(x)| < \varepsilon. \tag{21}$$

considérons deux suites $\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ définies par

$$x_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad x'_k = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad k \geq 1.$$

On aura alors, en vertu de (21),

$$\forall k \geq 1 : \begin{cases} P(x_k) > f(x_k) - \varepsilon = 1 - \varepsilon > 0, \\ P(x'_k) < f(x'_k) + \varepsilon = 1 + \varepsilon < 0, \end{cases}$$

Donc, 'aprés le théorème des valeurs intermédiaires:

$$\forall k \geq 1, \quad \exists c_k \in [x_k, x'_k] : P(c_k) = 0,$$

donc P s'annule sur l'ensemble infini dénombrable

$$\{c_k : k = 1, 2, \cdots\},$$

ce qui entraîne que $P \equiv 0$, puis

$$\sup_{x\in]0,1]} |f(x) - P(x)| = \sup_{x\in]0,1]} |f(x)| = 1 >> \varepsilon,$$

en contradiction avec (21).

3.10 Séries de Fourier sous forme complexe

1. Soit $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable et

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \tag{22}$$

sa série de Fourier,

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{+\ell} f(t)\cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)dt, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} f(t)\sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right)dt,$$

où $2\ell = b - a$. On pose, pour $n \in \mathbf{Z}$:

$$c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)e^{-\frac{in\pi t}{\ell}}dt.$$

Alors, la série (22) se représente sous la forme

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}} + c_{-n}e^{\frac{-in\pi x}{\ell}},$$

ce que l'on écrit habituellement sous forme d'une série à double entrée

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}. \tag{23}$$

On dit que (23) est la forme complexe de la séie de Fourier (22).

La n iḿe somme partielle de la série (23) est définie par le plynôme trigonométrique

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\frac{ik\pi x}{\ell}}$$

qui n'st autre que la n ième somme partielle $s_n(f)(x)$ de (22).

2. Signalons encore une autre forme de la série (22).

On peut écrire chaque terme de (22) sous la forme:

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell} + \varphi_n\right),$$

où $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et φ_n est choisi de sorte que

$$\cos\varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}, \quad \sin\varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+b_n^2}}.$$

La série (22) prend alors la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega_n x + \varphi_n), \quad \varphi_n = \frac{n\pi}{\ell}. \tag{24}$$

Dans la pratique, on appelle souvent (24) développement de f en une somme de composantes harmoniques (en supposant bien entendu la série (24) convergente vers f); $A_n \sin(\omega_n x + \varphi_n)$ est dit harmonique de rang n; A_n et φ_n sont appelés respectivement amplitude et angle de phase de l'harmonique; ω_n est dit pulsation et $\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n}{2\ell}$ fréquence harmonique.

3.11 Convergence en moyenne des séries de Fourier. Egalité de Perseval

On considère l'espace $\mathbf{R}[a,b]$ des fonctions réelle intégrables. A lieu d'utiliser l'écart de deux fonctions $f, g \in \mathbf{R}[a,b]$ sous la forme

$$\sup_{[a,b]} |f(x) - g(x)|,$$

on considère maintenant l'écart quadratique moyen, défini par

$$\left(\int_a^b (f(t) - g(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Comme on l'a vu, des difficulés apparaissent dans l problème de lm'approximation ponctuelle des fonctions par les sommes partielles de leurs séries de Fourier, d'autant plus que l'approximation ponctuelle es impossible, e général, partout dans $[a,b]$. La situation change si l'on considère l'approximation en moyenne, i.e. en utilisant l'écart quadratique.

On se propose dans ce paragraphe de démontrer la proposition suivante:

$$\forall f \in \mathbf{R}[a,b], \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - s_n(f)|^2 dt = 0 \tag{25}$$

où $s_n(f)$ est la n ième somme partielle de la série de Fourier de f:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

et

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{+\ell} f(t) \cos\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(t) \sin\left(\frac{n\pi t}{\ell}\right) dt, \quad (2\ell = b - a).$$

La relation (25) se traduit en disant que la série de Fourier de f converge vers f en moyenne (quadratique).

Il nousfaudra quelque proposirions préliminaires. Remarquons d'abord que le système trigonométrique

$$1, \quad \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right),\ \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right), \cdots, \cos\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right),\ \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right), \cdots \tag{26}$$

est orthogonal sur $[a, b]$ (voir relations (4)).

Lemma 3.27 *Soit $f \in \mathbf{R}[a, b]$. Alors, pour tout $n \in \mathrm{N}$ et pour tout polynôme trigonométrique*

$$T_n(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) + \beta_k \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right),$$

on a

$$\int_a^b |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt \leq \int_a^b |f(t) - T_n(t)|^2 dt, \tag{27}$$

ce qui signifie que, parmi les polynômes trigonométriques T_n, la somme partielle $s_n(f)$ e la série de Fourier de f fournit la meilleure approximation en moyenne (et ceci pour tout n).

Proof. On note a_n, b_n les coefficients de Fourier de f. On a, compte tenu des relations (4):

$$\int_a^b |f(t) - T_n(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt - 2\int_a^b f(t)T_n(t)dt + \int_a^b |T_n(t)|^2 dt =$$

$$= \int_a^b |f(t)|^2 dt + \ell[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - a_k)^2 +$$

$$+(\beta_k - b_k)^2 - \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right)] \geq 0. \tag{28}$$

Pour $\alpha_k = a_k$, $\beta_k = b_k$, on a en particulier

$$\int_a^b |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt - \ell\left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2\right) \geq 0. \tag{29}$$

Alors, (28) et (29) impliquent

$$\int_a^b |f(t) - T_n(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt +$$

$$+\ell\left[\frac{(\alpha_0 - a_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2\right],$$

d'où la relation (27).

$\blacksquare$

Corollary 3.28 *On a l'inégalité, dite* inégalité de Bessel*:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \leq \frac{1}{\ell}\int_a^b f(t)^2 dt. \tag{30}$$

Dans ce qui suit, on démontrera qu'en fait, il y a égalité dans (30).

Remark 3.29 On voit maintenant pourquoi la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\mathrm{Log} n} \tag{31}$$

(partout convergente) ne peut être la série de Fourier d'aucune fonction de $\mathbf{R}[a,b]$, car, d'après (30), on aurait

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\mathrm{Log} n)^2} < +\infty$$

ce qui est manifestement faux.

On a précisé plus haut que (31) n'était la série de Fourier d'aucune fonction sommable (au sens de Lebesgue). Mais la démonstration d ce résultat est beaucoup plus délicate et nécessite l'utilisation d'autres moyennes (et non la relation (30) qui généralemnt n'est plus applicable dans le cas de fonctions sommables). on montre que pour toute fonction sommable, la série $\sum \frac{b_n}{n}$ est toujours convergente (ce qui n'est pas le cas de la série (31)). Remarquons encore que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ peut, quand même, être divergente.

Lemma 3.30 *Pour toute fonction continue f: $[a,b] \to \mathbf{R}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt = 0. \tag{32}$$

Proof. D'après le lemme 3.27, on a

$$\int_a^b |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt \leq \int_a^b |f(t) - \sigma_n(\tilde{f})(t)|^2 dt \tag{33}$$

où $\{\sigma_n(\tilde{f})\}$ est la suite des sommes de Cesàro construite pout-r la fonction $\tilde{f}$ continue périodique de période $2(b-a)$ définie par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad a \leq x \leq b, \\ f(2a-x) & \text{si} \quad 2a-b \leq x < a. \end{cases}$$

0r la suite de polynômes trigonométriques converge uniformémnt vers $\tilde{f} \equiv f$ sur $[a, b]$, donc on peut passer à la limite sous le signe somme dans le second membre de (33); la relation (32) en découle. ∎

On peut maintenant établir le résultat principal de ce paragraphe.

Theorem 3.31 *Pour toute fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - s_n(f)(t)|^2 dt = 0.$$

Proof. L'idée de la démonstration consiste à approximer f en moyenne par des fonctions continues et à utiliser ensuite le lemme 3.30.
Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la démonstration du lemme de Riemann, on peut construire une fonction en escaliers $\varphi_\varepsilon : [a, b] \to \mathbf{R}$ telle que

$$\int_a^b |f(t) - \varphi_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon^2. \tag{34}$$

Soit $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ les points de discontinuité de φ_ε. Alors, en modifiant φ_ε dans les voisinages $[x_i - \delta, x_i + \delta]$ arbitrairement petits des points x_i, on peut facilemnt connstruier une fonction *continue* $f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbf{R}$ de telle sorte que l'on ait

$$\int_a^b |f(t) - f_\varepsilon(t)|^2 dt < \varepsilon^2. \tag{35}$$

Par exemple, on peut définir la fonction continue f_ε comme suit:

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) \quad \text{si} \quad x \notin \cup_{i=1}^m [x_i - \delta, x_i + \delta], \\ \text{affine sur} \quad [x_i - \delta, x_i + \delta], \quad i = 1, \cdots, m. \end{cases}$$

Dans ce cas, on a, pour $\delta > 0$ suffisamment petit

$$\int_a^b |\varphi_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)|^2 dt = \sum_{i=1}^m \int_{x_i-\delta}^{x_i+\delta} |\varphi_\varepsilon(t) - f_\varepsilon(t)|^2 dt \leq 4M^2 \cdot 2\delta m < \varepsilon,$$

où $M = \sup|\varphi_\varepsilon|$. Les relations (34) et (35) impliquent alors, en vertu de l'inégalité de Minkowski

$$\|f - f_\varepsilon\|_2 \leq \|f - \varphi_\varepsilon\|_2 + \|\varphi_\varepsilon - f_\varepsilon\|_2 < 2\varepsilon. \tag{36}$$

D'aprés le lemme 3.30, il existe n_0 tel que

$$\forall n > n_0 : \ \|f_\varepsilon - s_n(f_\varepsilon)\|_2 < \varepsilon. \tag{37}$$

D'autre part, (29) et (36) impliquent

$$\|s_n(f_\varepsilon - f)\|_2 \leq \frac{\sqrt{\ell}}{\|} f_\varepsilon - f\|_2 < \frac{2\varepsilon}{\ell}. \tag{38}$$

Finalement, en vertu de (36), (37), (38), on a, pour tout $n > n_0$:

$$\begin{aligned} \|f - s_n(f)\|_2 &\leq \|f - f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon - s_n(f_\varepsilon)\|_2 + \|s_n(f_\varepsilon - f)\|_2 \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{\ell}. \end{aligned}$$

■

Corollary 3.32 *Pour toute fonction intégrable $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, on a la relation, dite égalité de Parseval*

$$\frac{1}{\ell}\int_a^b f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2.$$

Cette relation se traduit en disant que le système trigonométrique (26) est *total* dans lespace $\mathbf{R}[a, b]$, ou autrement, que toute fonction $f \in \mathbf{R}[a, b]$ peut être approximée en moyenne quadratique par des polynômes trigonométriques.

4 Méthodes itératives liées à l'optimisation

4.1 Introduction

Plan:

1. Méthode du gradient

2. Méthode du gradient conjugué.

Soit le problème algébrique: trouver $\overline{x}$ solution de $A\overline{x} = b$, où A est symétrique, définie positive:

- A est symétrique:

$$Ax \cdot y = x \cdot Ay, \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

- A définie positive:

$$\forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}, \quad Ax \cdot x > 0.$$

Les méthodes du gradient et du gradient conjugué sont itératives: on construit une suite $(x^k)_k$ destinée à converger vers la solution $\overline{x}$ du problème de départ, $\forall x_0 \in \mathbf{R}^n$.

La méthode du gradient conjugué converge au bout d'un nombre fini d'itérations.

Les méthodes du gradient sont basées sur un algorithme de minimisation d'une fonctionnelle donnée.

4.2 Principe des méthodes de descente

Soit le problème: trouver $\overline{x} \in \mathbf{R}^n$ solution de

$$J(\overline{x}) = \min_{x \in \mathbf{R}^3} J(x), \quad J(x) \equiv \frac{1}{2} Ax \cdot x - b \cdot x$$

où $A \in \mathbf{R}^{n,n}$ est une matrice symétrique, définie positive. Alors $\overline{x}$ est un point critique de J, i.e. vérifie:

$$\nabla J(\overline{x}) = 0 = A\overline{x} - b.$$

Réciproquement, si $r \equiv b - Ax$:

$$J(x+p) - J(x) = \frac{1}{2} Ap \cdot p - (b - Ax) \cdot p.$$

On en déduit, si $p \neq 0$:

$$J(\overline{x}+p) - J(\overline{x}) = \frac{1}{2} Ap \cdot p > 0.$$

Il en résulte:

$$A\overline{x} = b \iff J(\overline{x}) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} J(x).$$

On construit l'algorithme suivant. Etant donné $x^0 \in \mathbf{R}^n$, pratiquement, une estimation initiale, on considère la récurrence:

$$x^{k+1} = x^k + p^k,$$

où p^k est appelé la direction de descente.

Evidemment: $r^k = b - Ax^k \neq 0$. On cherche p^k tel que:

$$J(x^k + p^k) - J(x^k) = \min_{p \in \mathbf{R}^n} \{J(x^k + p) - J(x^k)\} \iff \min_{p \in \mathbf{R}^n} J(x^k + p). \quad (39)$$

Une direction privilégiée correspond à $\nabla J(x^k)$.

Proposition 4.1 *On a la relation*

$$r^k = -\nabla J(x^k).$$

Proof. Un calcul direct montre que

$$\nabla J(x) = Ax - b$$

donc $r^k = b - Ax^k = -\nabla J(x^k)$.

■

4.2.1 Méthode du gradient

On relaxe le problème (39) en lui substituant: trouver $\alpha^k \in \mathbf{R}$ solution de

$$J(x^k + \alpha^k r^k) = \min_{\alpha \in \mathbf{R}} J(x^k + \alpha r^k) \iff \min_{\alpha \in \mathbf{R}} \{J(x^k + \alpha r^k) - J(x^k)\}. \quad (40)$$

Proposition 4.2 *La solution du problème (40) est donnée par la récurrence:*

$$\alpha^k k = \frac{(r^k \cdot r^k)}{(Ar^k \cdot r^k)}, \quad x^{k+1} = x^k + \alpha^k r^k.$$

Proof. Le calcul donne:

$$J(x^k + \alpha r^k) - J(x^k) = \frac{\alpha^2}{2}(Ar^k \cdot r^k) - \alpha(r^k \cdot r^k).$$

On obtient un polynôme en α dont le terme de plus haut degré est $(Ar^k \cdot r^k) > 0$, car A est symétrique définie > 0. L'étude des variations de $\alpha \mapsto J(x^k + \alpha r^k) - J(x^k)$ montre que le minimum est atteint pour $\alpha = \alpha^k$ tel que

$$\frac{d}{d\alpha} J(x^k + \alpha r^k) - J(x^k) = 0.$$

■

On en déduit l'algorithme suivant pour $x^0 \in \mathbf{R}^n$ arbitraire:

$$r^k = b - Ax^k$$
$$\alpha^k = \frac{(r^k \cdot r^k)}{(Ar^k \cdot r^k)}$$
$$p^k = \alpha^k r^k$$
$$x^{k+1} = x^k + p^k$$

Cet algorithme n'est pas optimal. En particulier, il contient deux multiplications matrice $\times$ vecteur qui coûtent cher.

Compte tenu de la relation

$$r^{k+1} = r^k - \alpha^k A r^k$$

on obtient l'algorithme suivant pour $x^0 \in \mathbf{R}^n$ arbitraire:

$$c^k = Ar^k$$
$$\alpha^k = \frac{(r^k \cdot r^k)}{(c^k \cdot r^k)}$$
$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k r^k$$

4.2.2 Convergence et Interprétation géométrique

Proposition 4.3 *On a la relations:*

$$\forall k \geq 0, (r^k | r^{k+1}) = 0.$$

Proof. Par le calcul:

$$r^{k+1} = b - Ax^{k+1} = b - A(x^k + \alpha^k r^k) = r^k - \alpha^k A r^k,$$
$$(r^k \cdot r^{k+1}) = (r^k \cdot r^k - \alpha^k A r^k) = (r^k \cdot r^k) - \frac{(r^k \cdot r^k)}{(Ar^k \cdot r^k)}(r^k \cdot Ar^k) = 0.$$

■

Donnons une interprétation géométrique dans $\mathbf{R}^2$ des méthodes de descente.

$E(x) \equiv (A(x-\overline{x})\cdot(x-\overline{x})) = 2J(x) + (A\overline{x}\cdot\overline{x}) = a^2$ avec $a \neq 0$ est l'équation d'une ellipse.

Pour $a^2 = \alpha^k$, on obtient une suite d'ellipses $E(x) = E(x^k)$ concentriques autour du minimum $\overline{x}$ de la fonctionnelle dont elles représentent des courbes de niveau.

Le vecteur r^k est tangent à l'ellipse $E(x) = E(x^{k+1})$. Comme r^{k+1} est perpendiculaire à r^k ($(r^k\cdot r^{k+1}) = 0$), r^{k+1} est perpendiculaire à la tangente de la courbe de niveau.

Proposition 4.4 *On a*

$$J(x^{k+1}) < J(x^k).$$

Proof. On a

$$\begin{aligned} J(x^{k+1}) - J(x^k) &= \frac{|\alpha^k|^2}{2}(Ar^k\cdot r^k) - \alpha^k r^k\cdot r^k \\ &= \frac{1}{2}\frac{(r^k\cdot r^k)^2}{(Ar^k\cdot r^k)^2}(Ar^k\cdot r^k) - \frac{(r^k\cdot r^k)}{(Ar^k\cdot r^k)}(r^k\cdot r^k) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{(r^k\cdot r^k)^2}{(Ar^k\cdot r^k)} < 0 \end{aligned}$$

car $r^k \neq 0 \Rightarrow (Ar^k\cdot r^k) > 0$. Il en résulte:

$$E(x^{k+1}) - E(x^k) = 2J(x^{k+1}) - 2J(x^k) < 0.$$

■

Theorem 4.5 *Si* cond$A > 1$*, alors La suite* $(x^k)_k$ *converge vers la solution* $\overline{x}$ *de* $A\overline{x} = b$*.*

Proof. En reportant la valeur de α^k dans $E(x^{k+1})$, on obtient:

$$E(x^{k+1}) = E(x^k) - \frac{(r^k\cdot r^k)^2}{(Ar^k\cdot r^k)} = E(x^k)\left(1 - \frac{1}{E(x^k)}\frac{(r^k\cdot r^k)^2}{(Ar^k\cdot r^k)}\right),$$

ou encore, puisque $E(x^k) = (r^k\cdot A^{-1}r^k)$:

$$E(x^{k+1}) = (1-\gamma^k)E(x^k), \quad \gamma^k \equiv \frac{(r^k\cdot r^k)^2}{(Ar^k\cdot r^k)(r^k\cdot A^{-1}r^k)}. \tag{41}$$

Sauf si $r^k = 0$ (cas que l'on élimine) ou $r^k = 0$ (alors c'est terminé, x^k est la solution cherchée), la quantité γ^k est toujours bien définie et > 0 car A est symétrique, définie positive. D'autre part:

$$(Ar^k \cdot r^k) \leq \|A\| \|r^k\|^2,$$
$$(r^k \cdot A^{-1} r^k) \leq \|A^{-1}\| \|r^k\|^2$$

donc:

$$\frac{(Ar^k \cdot r^k)}{\|r^k\|^2} \frac{(r^k \cdot A^{-1} r^k)}{\|r^k\|^2} \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \mathrm{cond} A.$$

$$\frac{1}{\gamma^k} = \frac{(Ar^k \cdot r^k)(r^k \cdot A^{-1} r^k)}{(r^k \cdot r^k)^2} = \frac{(Ar^k \cdot r^k)(r^k \cdot A^{-1} r^k)}{\|r^k\|^2 \|r^k\|^2} \frac{\|r^k\|^2 \|r^k\|^2}{(r^k | r^k)^2}$$
$$\leq \mathrm{cond} A,$$

c'est-à-dire

$$\gamma^k \geq \frac{1}{\mathrm{cond} A}.$$

On en déduit, compte tenu de (41):

$$E(x^{k+1}) \leq E(x^k) \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond} A}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond} A}\right)^{k+1} E(x_0)$$

avec

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{\mathrm{cond} A}\right) < 1$$

d'où

$$\lim_{k \to \infty} E(x^k) = 0.$$

Or

$$E(x^k) \geq \lambda_N \|x - \overline{x}\|^2, \quad \lambda_N > 0$$

où λ_N est la plus petite valeur propre de A, donc

$$\lim_{k \to \infty} \|x - \overline{x}\| = 0.$$

■