Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
Octobre 2005

Contrôle Continu

Exercice 1

Etudier les extrema de la fonction:

$$f\ (x,y) \mapsto f(x,y) = x^3y^2(a-x-y)$$

où $a \in \mathbf{R}$ est une constante donnée.

Exercice 2

Montrer que si $u(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Exercice 3

Déterminer les points critiques de la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3axy$$

où a est un paramètre quelconque donné. Montrer que la courbe d'équation $f(x,y) = 0$ admet plusieurs tangentes en ce(s) point(s).

Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
4 Novembre 2005
Durée: 2 heures

Contrôle Continu

Exercice 1

Trouver parmi les parallélépipèdes rectangles d'aire donnée S celui dont le volume est le plus grand.

Exercice 2

Soit la surface conique Σ d'équation, dans le système de coordonnées polaires:

$$z \tan\alpha = r, \quad 0 < r < \tan\alpha,$$

où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$ est donné.

1. On considère l'application:

$$\Phi : (r,\theta) \in [0, \tan\alpha[\times[0, 2\pi[\mapsto (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = \frac{r}{\tan\alpha}).$$

   Vérifier que la matrice jacobienne J_Φ associée est de rang 2 en tout point de Σ, c'est-à-dire que pour tout $(r,\theta) \in [0, \tan\alpha[\times[0, 2\pi[$, on peut extraire de J_Φ une sous-matrice carrée inversible. *Indication*: Montrer que la normale à Σ est non nulle en tout point de Σ.

2. On rappelle que les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre de gravité d'un système de masses ponctuelles m_i réparties en des points de coordonnées (x_i, y_i, z_i) sont définies par les relations:

$$x_G = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}, \quad y_G = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}, \quad z_G = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}.$$

   On suppose que Σ est constituée d'un matériau de masse surfacique uniforme ρ. Calculer:

$$M = \iint_\Sigma \rho d\Sigma,$$

où l'on a posé:

$$d\Sigma(r,\theta) = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\| dr d\theta,$$

ainsi que les intégrales

$$J_x = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} \rho x d\Sigma, \quad J_y = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} \rho y d\Sigma, \quad J_z = \frac{1}{M} \iint_{\Sigma} \rho z d\Sigma.$$

Interpréter ces intégrales et commenter le résultat obtenu. On pourra s'appuyer sur des considérations de symétrie.

Le centre de gravité de la surface Σ appartient-il à Σ?

3. On suppose maintenant que Σ délimite un cône C rempli du même matériau de masse volumique ρ uniforme et on note M la masse du solide ainsi obtenu. Calculer $M = \iiint_C \rho dxdydz$, ainsi que les intégrales

$$I_x = \frac{1}{M} \iiint_C \rho x dxdydz, \quad I_y = \frac{1}{M} \iiint_C \rho y dxdydz, \quad I_z = \frac{1}{M} \iiint_C \rho z dxdydz,$$

Interpréter et commenter le résultat.

Exercice 3

Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_L x^2 y^3 dx + dy + z dz$$

où L est le cercle défini par les équations:

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad z = 0.$$

Indication On pourra soit paramétrer le cercle L au moyen des coordonnées cylindriques soit remarquer qu'il peut être vu comme le bord du disque défini par:

$$x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = 0.$$

Licence de Mécanique
Méthodes Mathématiques pour la Mécanique (MMM1)
13 Décembre 2005
Durée: 2 heures

Contrôle Continu

Exercice 1 (5 points)

1. Montrer que l' application $\mathbf{M}_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^+$ définie par:

$$\|A\|_1 = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

   est une norme matricielle.

2. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on note:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

   (a) Soit e_j le j ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^n$. Montrer que

$$\frac{\|Ae_j\|_1}{\|e_j\|_1} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

   (b) En déduire que

$$\|A\|_1 = \sup_{x \in \mathbf{R}^n,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}.$$

Exercice 2 (4 points)

Soit $\|\cdot\|$ une norme vectorielle sur $\mathbf{R}^m$. A toute matrice $A \in \mathbf{M}_m(\mathbf{R})$, on associe sa norme $\|A\|$ définie par

$$\|A\| = \sup_{x \in \mathbf{R}^m,\, x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

1. Montrer que:

$$\forall A, B \in \mathbf{M}_m(\mathbf{R}), \quad \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

2. Pour $b \in \mathbf{R}^m$ et $A \in \mathbf{M}_m(\mathbf{R})$ donnés, on note x la solution de :

$$Ax = b.$$

Soit $\Delta b \in \mathbf{R}^m$ et soit x' solution de

$$Ax' = b + \Delta b.$$

On pose $\Delta x \equiv x' - x$. Montrer que:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}.$$

Exercice 3 (5 points)

Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ symétrique, définie positive, c'est-à-dire vérifiant:

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \cdots, n, \quad \text{et} \quad (Ax, x) > 0, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\},$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire euclidien sur $\mathbf{R}^n$: $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, lorsque x et y ont pour coordonnées x_i, y_i, $i = 1, \cdots, n$, respectivement dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$.

Pour la résolution du système linéaire $Ax = b$, on considère la méthode itérative suivante: étant donné $x_0 \in \mathbf{R}^n$, on pose $r_0 = b - Ax_0$ et, tant que $r_k \neq 0$, on pose:

$$\alpha_k = \frac{(r_k, r_k)}{(Ar_k, r_k)}, \quad x_{k+1} = x_k + \alpha_k r_k, \quad \text{et} \quad r_{k+1} = b - Ax_{k+1}.$$

1. Que représente x_k si $r_k = 0$?

   Dans tout l'exercice, on suppose que k est un entier tel que $r_k \neq 0$.

2. Montrer que J est différentiable et déterminer sa différentielle.

3. Montrer que α_k est l'unique réel qui minimise sur $\mathbf{R}$ la fonction $\alpha \mapsto J(x_k + \alpha r_k)$.

4. Evaluer $J(x_{k+1}) - J(x_k)$.

5. Commenter l'intérêt de la méthode présentée.

Exercice 4 (6 points)

Soit $s > 0$ et soit $J \in \mathbf{N}$. . On considère la matrice $A \in \mathbf{M}_J(\mathbf{R})$ de coefficient général:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1-2s & \text{si} \quad i=j \\ s & \text{si} \quad |i-j|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que: $\forall x, h \in \mathbf{R}$:

$$\sin(x+h) - \sin(x) = 2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right),$$

$$\cos(x+h) - \cos(x-h) = -2\sin(x)\sin(h).$$

   Indication: On rappelle les formules:

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

2. En déduire un expression simple de

$$\sin((k-1)h) - 2\sin(kh) + \sin((k+1)h)$$

   en fonction de $\sin(kh)$ lorsque $k \in \mathbf{N}$ et $h \in \mathbf{R}$.

3. Vérifier que le vecteur $x^{(k)} \in \mathbf{R}^J$, $k = 1, \cdots, J$, de composantes:

$$x_i^{(k)} = \sin\left(\frac{ik\pi}{J+1}\right), \quad i = 1, \cdots, J,$$

   est un vecteur propre de A associé à la valeur propre

$$\lambda_k = 1 - 4s\left|\sin\left(\frac{k\pi}{2(J+1)}\right)\right|^2.$$

4. Pour résoudre numériquement le système $Ax = b$ pour un second membre $b \in \mathbf{R}^J$ donné, on utilise la méthode itérative de Jacobi construite à partir de la décomposition de A sous la forme $A = M - N$ où M est la diagonale de A. Montrer que le schéma numérique obtenu s'écrit:

$$u^{(k+1)} = Bu^{(k)} + c$$

   où $B = I - \frac{1}{(1-2s)}A$ et $c = \dfrac{1}{(1-2s)}b$.

5. On suppose que $s < \frac{1}{2}$. Montrer que le rayon spectral de B est

$$\rho(B) = \frac{2s}{(1-2s)}\left(1 - 2s\left|\sin\left(\frac{\pi}{2(J+1)}\right)\right|^2\right).$$

6. On suppose maintenant que:

$$\frac{1}{4} < s < \frac{1}{2}.$$

   En déduire que la méthode de Jacobi converge.