Chapitre 1

Qu'est-ce qu'une probabilité ?

1 Modéliser une expérience dont on ne peut prédire le résultat

1.1 Ensemble fondamental d'une expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prédire le résultat. L'**ensemble fondamental d'une expérience aléatoire** est l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience. Cet ensemble est en général noté Ω. Il peut être fini, dénombrable, ou infini non dénombrable. Un point $\omega \in \Omega$ est une réalisation de l'expérience.

Exemple 1.1

1. On lance un dé, on s'intéresse au chiffre obtenu. L'ensemble fondamentale est alors fini, plus précisément
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$
2. On jette une pièce autant de fois que nécessaire pour obtenir une fois "face". L'ensemble fondamentale est alors infini dénombrable. Si on note F pour "face" et P pour "pile", on a
$$\Omega = \{F, PF, PPF, PPPF, \ldots, PPP \cdots PPF, \ldots\}.$$
3. On s'intéresse à la durée de vie d'une bactérie. L'ensemble fondamental est alors infini, non dénombrable : $\Omega = [0, +\infty[$.

Remarque 1.2 Une expérience doit être décrite de façon précise afin son ensemble fondamentale soit défini de façon claire. Lorsqu'on lance un dé il peut se passer beaucoup de choses, il peut attérir sur une face, sur la tranche, dans un trou...

1.2 Évènement d'une expérience aléatoire

Définition 1.3 Un **événement d'une expérience aléatoire** est une combinaison de résultats possibles.

Exemple 1.4 On lance deux dés et on regarde les chiffres obtenus. L'ensemble fondamental est
$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3) \ldots, (2, 1), (2, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}.$$
On peut considérer les événements suivants :
- la somme des points est 6 : $A = \{(1, 5), (5, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 3)\}$,

- la somme des points est un multiple de 3 :
$B = \{(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6)\}$.

Toute expérience aléatoire comprend un **événement certain** et un **événement impossible**. L'événement impossible, noté $\emptyset$, est le sous-ensemble qui ne contient pas d'éléments. L'événement certain est le sous-ensemble qui contient tous les éléments, c'est l'ensemble fondamental Ω lui-même.

Exemple 1.5 On lance un dé.
Si A_1 est l'événement "le nombre de points est supérieur à 7", alors $A_1 = \emptyset$.
Si A_2 est l'événement "le nombre de points est inférieur à 7", alors $A_2 = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$.

On appelle **événement simple** un événement qui ne contient qu'un seul élément.

1.3 Opérations sur les événements

Soit A et B deux évènements.
- **Négation** : $\overline{A}$ est l'évènement contraire de A, ou complémentaire de A par rapport à Ω : $\overline{A} = \Omega \backslash A$. $\overline{A}$ est l'événement qui se réalise lorsque A ne se réalise pas.
- **Intersection** : L'événement $C = A \cap B$ combiné à partir des événements A et B est réalisé lorsque A et B sont réalisés simultanément.
- **Union** : L'événement $D = A \cup B$ combiné à partir des événements A et B est réalisé lorsque l'un des événements A ou B est réalisé.
Deux événements A et B sont dits incompatibles ou disjoints si $A \cap B = \emptyset$.
La relation "l'événement A implique l'événement B" signifie que si A se réalise alors B se réalise aussi. On a $A \subset B$.

Exemple 1.6 On jette deux dés. On considère les évènements suivants : $A =$"la somme des points vaut 6", $B =$"la somme des points est un multiple de 3", $C =$"avoir au moins un 6". On a alors

$$\begin{aligned} A &= \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\} \\ B &= \{(1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6)\} \\ C &= \{(1,6),(6,1),(2,6),(6,2),(3,6),(6,3),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

On a $A \subset B$, $A \cap C = \emptyset$ et $\overline{C} =$"n'avoir aucun 6".

<u>Extension des définitions</u> :
On considère une suite infinie d'évènements $A_1, A_2, \ldots$.
- L'union $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ est l'événement qui regroupe tous les points des événements $A_1, A_2, \ldots$: on a "$a \in \cup_{i=1}^{\infty} A_i$" ssi "il existe un entier $i \geq 1$ tel que $a \in A_i$".
- L'intersection $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$ est l'événement composé des points communs à tous les événements $A_1, A_2, \ldots$: on a "$a \in \cap_{i=1}^{\infty} A_i$" ssi "pour tous les entiers $i \geq 1$ on a $a \in A_i$".

2 Notion de probabilité

Considérons une expérience dont l'ensemble fondamental est Ω. On définit sur l'ensemble des événements une fontion qui à chaque événement associe un poids, appelé probabilité, compris entre 0 et 1 : plus le poids est proche de 0 moins l'événement risque de se réaliser, plus le poids est proche de 1 plus l'événement se réalisera souvent.

Définition 2.1 Une **probabilité** (ou **mesure de probabilité**) $\mathbb{P}$ sur Ω est une application sur l'ensemble des événements telle que

(i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(ii) pour tout événement A, $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$,

(iii) pour toute suite $A_1, A_2, \ldots$ d'événements disjoints (i.e., pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$), on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Une probabilité est une mesure dans le sens où plus un événement est grand plus sa probabilité est importante.

Propriétés 2.2 On a alors

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Si A et B sont deux événements disjoints alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
   De même, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une suite finie d'événements disjoints, on a
   $$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
3. Pour tout événement A, $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
4. Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(B \backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

Preuve.

1. On pose $A_1 = \Omega$ et $A_i = \emptyset$ pour $i \geq 2$. Alors d'après (iii), on a $P(\Omega) = P(\Omega) + \sum_{i=2}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset)$ et donc $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. On pose $A_i = \emptyset$ pour $i \geq n+1$, alors d'après (iii)
   $$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(\emptyset) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$
   On conclut en remarquant que $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
3. Les événements $A_1 = A$ et $A_2 = \overline{A}$ sont disjoints et $A_1 \cup A_2 = \Omega$, donc $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$.
4. Si $A \subset B$, les événements $A_1 = A$ et $A_2 = B \backslash A$ sont disjoints et $A_1 \cup A_2 = B$, alors $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \backslash A) + \mathbb{P}(A)$.

$\triangle$

Proposition 2.3 Soit A et B deux événements quelconques, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

De plus si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements quelconque, on a

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

Preuve. Il suffit d'écrire $A \cup B$ comme l'union disjointe $(A\backslash(A \cap B)) \cup (B\backslash(A \cap B)) \cup (A \cap B)$ pour la première relation et de généraliser cela pour la seconde en posant $B_1 = A_1$, $B_2 = A_2\backslash(A_1 \cap A_2)$, ..., $B_i = A_i\backslash(A_1 \cap \ldots \cap A_i)$. Les événements B_i sont disjoints avec $B_i \subset A_i$ et $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$. △

Cas particulier d'un ensemble fondamental discret
Considérons une expérience aléatoire dont l'ensemble fondamental Ω est fini ou dénombrable : $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots\}$ où les points ω_i sont distincts.
Une probabilité P sur cet espace est entièrement déterminée par les probabilités $\mathbb{P}(\{\omega_i\})$, pour $i \geq 1$. En effet, si A est un événement on a

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} \mathbb{P}(\{\omega_i\}).$$

On a forcément que la somme totale des probabilités est égale à 1 :

$$\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = 1$$

Exemple important : l'équiprobabilité
Si $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ est un espace fini où les points ω_i sont distincts, on définit la **probabilité uniforme** comme la probabilité qui associe à chaque singleton $\{\omega_i\}$ la même valeur, c'est à dire $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \mathbb{P}(\{\omega_j\})$ pour tout i, j. Comme $\mathbb{P}(\Omega) = 1 = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\})$, on a forcément $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{card(\Omega)}$. On dit alors qu'on est dans une situation d'**équiprobabilité**.

Exemple 2.4 On jette un dé : $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$. On définit la probabilité de tomber sur une face du dé. On suppose que le dé est bien équilibré (non truqué), c'est à dire que chaque face à la même chance d'apparaître. On est en situation d'équiprobabilité et donc $\mathbb{P}(\{i\}) = 1/6$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$.
Soit A l'événement "obtenir un chiffre pair", on a alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 1/2.$$

Soit B l'événement "obtenir au moins deux". On remarque que $\overline{B}$ ="tomber sur 1", d'où

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = 1 - 1/6 = 5/6$$

3 Probabilités conditionnelles

En 2005, en France, le nombre de porteurs du virus de l'hépatite C (VHC_+) est d'environ 300 000 personnes [1]. Un médecin avant de recevoir un patient inconnu en consultation peut donc estimer que ce patient a une probabilité de 0.5% d'être VHC_+ en supposant que sa clientèle ressemble globalement à l'ensemble de la population française (qui comporte environ 60 millions de personnes). Si en consultant le dossier du patient, il s'aperçoit que son patient a 10 ans, alors la probabilité que ce patient soit VHC_+ chute pour devenir inférieur à 10^{-4} (vu le mode de transmission du virus). Par contre si en consultant le dossier, il s'aperçoit que le patient est toxicomane par voie intraveineuse depuis 10 ans, les données épidémiologiques

1. Voir travaux de *C. Meffre and al.* de l'Institut de veille sanitaire présentés en 2005.

montrent que la probabilité que ce patient soit VHC_+ est alors supérieure à 50%. Si dans le dossier, il est seulement indiqué que le patient est asthmatique, alors le médecin n'aura aucune information supplémentaire vu qu'il n'y a aucun lien entre l'asthme et le fait d'être porteur de VHC. Le médecin estimera donc que son patient a toujours une probabilité de 0.5% d'être VHC_+. Le fait d'avoir l'asthme influe pas sur la probabilité d'être VHC_+, on dit que ces événements sont indépendants.
On voit bien dans cet exemple qu'une information complémentaire peut influer ou non la probabilité d'être VHC_+. La notion de probabilité conditionnelle permet de prendre en compte des information complémentaires dans le calcul des probabilités.

Dans l'exemple suivant, on quantifie exactement de le rôle d'une information complémentaire.

Exemple 3.1 On jette deux dés distincts. On a $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(5,6),(6,6)\}$. On a donc 36 événements élémentaires qui ont chacun la même probabilité d'apparaître, soit 1/36.
On veut connaitre la probabilité de l'événement A : "la somme des dés vaut 8". On remarque que $A = \{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$, d'où $\mathbb{P}(A) = 5/36$.
Maintenant on cherche toujours la même probabilité, mais on sait déjà que le premier dé donne un 3. On note B l'événement : "le premier dé vaut 3".
Que vaut alors la probabilité que la somme vaut 8 sachant que le premier dé vaut 3 ? La probabilité recherchée est appelée probabilité conditionnelle de A sachant B et est notée $P_B(A)$.
Sachant que le premier dé vaut 3, on ne regarde plus la même expérience, on n'est plus sur le même espace car on ne considère plus que le deuxième dé (c'est comme-ci on ne lancait plus qu'un dé). Il y a alors 6 résultats dans cette expérience : $\{1,2,3,4,5,6\}$ et chacune a la même probabilité d'apparaître, soit 1/6. Par conséquent la probabilité que la somme des deux dés soit égale à 8 sachant que le premier dé vaut 3 est $P_B(A) = 1/6$ (il n'y a qu'une possibilité, le deuxième dé doit valoir 5).
On remarque que l'événement $A \cap B$ est l'événement "le premier dé donne 3 et la somme des chiffres vaut 8 lorsqu'on lance deux dés", on a alors $A \cap B = \{(3,5)\}$ dans l'ensemble $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(5,6),(6,6)\}$ de cardinal 36.
D'autre part, on a $B = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$.
D'où $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/36$ et $\mathbb{P}(B) = 6/36 = 1/6$. On remarque que

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition 3.2 Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La **probabilité conditionnelle** $P_B(A)$, noté aussi $\mathbb{P}(A|B)$, de A sachant B est définie par :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

3.1 Formule de Bayes

On considère deux événements A et B quelconques.
On peut A écrire comme l'union de deux événements disjoints : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) \\ &= \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

L'équation (1.1) s'appelle **formule des probabilités totales**.

Exemple 3.3 Une compagnie d'assurance répartit ses clients en deux classes : ceux qui sont enclins aux risques cardio-vasculaires (ie., à haut risque) et ceux qui ne le sont pas (i.e., à risque modéré). Elle constate que ceux à haut risque ont une probabilité de 0.4 d'avoir un accident dans l'année, tandis que ceux à risque modéré ont une probabilité de 0.2. On suppose que 30% de la population est à haut risque. Quelle est alors la probabilité qu'un nouvel assuré ait un accident cario-vasculaire durant l'année qui suit le signature de son contrat ?
On note A l'événement "l'assuré a un accident pendant l'année" et B l'événement "l'individu est à haut risque". Alors d'après la formule des probabilités totales (1.1), on a

$$\mathbb{P}(A) = 0.4 \times 0.3 + 0.2 \times 0.7 = 0.26.$$

La formule de Bayes permet de calculer les probabilités a postériori d'un événement en fonction des probabilités a priori de cet événement, i.e. connaitre $\mathbb{P}_A(B)$ quand on connait $\mathbb{P}_B(A)$ et $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A)$.

Proposition 3.4 Soient A et B deux événements. La **formule de Bayes** s'écrit :

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B})}$$

Preuve. Il suffit d'écrire $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$ et d'utiliser la formule des probabilités totales. △

Attention ! $\mathbb{P}_{\overline{B}}(A) \neq 1 - \mathbb{P}_B(A)$. Par contre, on a bien $\mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}_B(A)$. La fonction $A \to \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité.

Exemple 3.5 On reprend l'exemple 3.3 sur la compagnie d'assurance. On veut connaitre la probabilité qu'un assuré à bas risque ait un accident cadio-vasculaire, i.e. la probabilité $\mathbb{P}_A(C)$, où C est l'événement "l'assuré n'est pas enclin aux accidents". On remarque que $C = \overline{B}$. D'où

$$\mathbb{P}_A(C) = \frac{\mathbb{P}_C(A)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0.2 \times 0.7}{0.26} = 0.54.$$

4 Indépendance entre deux événements

Dans le langage courant, on dit de deux événements qui ne sont pas liés entre eux qu'ils sont indépendants. Par conséquent, on a tendance à dire que si A et B sont indépendants, la connaissance de B ne donne aucune information utile pour la connaissance de l'événement A et donc de manière naturelle $\mathbb{P}_B(A)$ doit être égale à $\mathbb{P}(A)$. On va donner à partir de cette constatation la définition mathématique de l'indépendance :

Définition 4.1 Deux événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Attention ! Les notions d'événements indépendants et d'événements disjoints n'ont aucun rapport. Par exemple, si on jette deux dés et on considère les événements $A =$"le premier dé vaut 3" et $B =$"le deuxième dé vaut 1". Les événements sont indépendants car on jette les dés de façon indépendante, mais les événements ne sont pas disjoints car l'événement $A \cap B = \{$le premier dé vaut 3 et le deuxième vaut 1$\}$ est possible.

Proposition 4.2 Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Preuve. On écrit A comme l'union de deux événements disjoints : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. D'où $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B})$. Ce qui implique que $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\overline{B})$ et donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. △

4.1 Indépendance entre plusieurs événements

Définition 4.3 On considère n événements $A_1, \ldots, A_n$. Les événements sont **mutuellements indépendants** si pour tout $k \leq n$, pour tout $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ distincts on a $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \ldots \mathbb{P}(A_{i_k})$.

Remarque 4.4 Si des événements sont mutuellements indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, mais la réciproque est fausse.
Par exemple, on jette deux dés, l'un rouge l'autre bleu et on considère les évènements suivants :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{le dé rouge donne un chiffre impair}\} \\ B &= \{\text{le dé bleu donne un chiffre impair}\} \\ C &= \{\text{la somme des deux dés est un chiffre impair}\}. \end{aligned}$$

A, B et C sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

5 Petits rappels d'analyse combinatoire

Dans le cas fini, lorsque les événements élémentaires sont équiprobables (par exemple, lorsque l'on lance des dés non truqués), on peut calculer la probabilité d'un événement A par :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

L'analyse combinatoire est l'étude des différents manières de "ranger" des objets.

5.1 Permutations

On appelle **permutation** un rangement ordonné de n objets. Le nombre de permutations est alors égal à $n!$.
Par exemple, si on considère trois objets a, b, c, il y a $3! = 6$ façons de les ordonner :

$$abc\,, acb\,, bac\,, bca\,, cab\,, cba.$$

5.2 Permutations avec répétition

Le nombre de permutations possible lorsque certains objets sont identiques est plus faible que lorsque tous les objets sont distincts. Si on considère n objets comprenant respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ termes identiques, le nombre de permutations est égal à $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Si on veut ranger 3 boules vertes et 2 boules rouges, on a en tout 5 éléments. Le nombre de classements est alors $\dfrac{5!}{3!2!} = 10$.

5.3 Arrangements

On veut ranger k éléments parmi n en tenant compte de l'ordre. On n'autorise pas les répétitions d'objet (on ne peut pas utiliser plusieurs fois le même élément). Le nombre de possibilités est alors :

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Par exemple si on veut savoir combien de nombres à 3 chiffres peuvent être formés avec l'ensemble $1, 3, 5, 7, 9$. On trouve dans ce cas $A_5^3 = 60$.

5.4 Combinaisons

On veut ranger k éléments parmi n mais cette fois-ci l'ordre ne nous intéresse pas. On n'autorise toujours pas les répétitions (expérience sans remise). Le nombre de possibilités est alors :

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ces coefficients satisfont une relation bien utile (triangle de Pascal) :

$$\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array} \right).$$

La formule du binôme de Newton est donnée par

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) a^k b^{n-k}.$$

6 Exercices sur le chapitre 1

Exercice 1.1.
Soit $\mathbb{P}$ une probabilité et A, B, C trois événements. Exprimer en fonction de $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap C)$, $\mathbb{P}(B \cap C)$ et, $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cap B \cap C)$ les probabilités des événements suivants :

1. A seul se produit
2. A et B se produisent mas pas C
3. les trois événements se produisent simultanément
4. au moins l'un des événements se produit
5. au moins deux événements se produisent
6. deux événements au plus se produisent
7. un seul événement se produit
8. deux événements seulement se produisent
9. aucun des trois événement ne se produit

Exercice 1.2.
Le jeu du loto consiste à deviner les 6 entiers qui vont être tiré au hasard parmi les entiers $\{1, \ldots, 49\}$.

1. Comment modéliser le tirage de 6 entiers parmi $\{1, \ldots, 49\}$?
   (Expliciter l'univers Ω et la probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω.)
2. On considère les événements suivants :

   $A_k =$ "avoir deviné exactement k bon(x) numéro(s)", $k \in \{0, 1, \ldots, 6\}$,
   $P =$ "perdre"="avoir 0,1 ou 2 bon(s) numéro(s)",
   $G =$ "gagner"="avoir au moins 3 bons numéros".

   Calculer la probabilité de ces événements.

Exercice 1.3.
Une boite I contient trois biles rouges et deux billes bleues et une boite II contient deux billes rouges et huit billes bleues. On lance une pièce de monnaie. Si le résultat est face, on tire une bille de la boite I et si le résultat est pile, on tire une bille de la boite II. Quelle est la probabilité de tirer une bille rouge ?
Si on a tiré une bille rouge, quelle est la probabilité d'avoir eu face ?

Exercice 1.4.
Une maladie M affecte $0,5\%$ de la population. On observe que 80% des malades possèdent un allèle spécifique du gène G, qui n'est présent que dans 12% de la population globale. On souhait utiliser la présence de l'allèle du gène G afin de conclure à une prédisposition à développer la maldie M.

1. Quelle est la probabilité qu'un sujet développe la maladie M s'il a l'allèle du gène G ?
2. Quelle est la probabilité qu'un sujet développe la maladie M s'il n'a pas l'allèle du gène G ?
3. Quelle est la proportion de gens qui ont l'allèle du gène G et qui ne développe pas M ?

Exercice 1.5.
Une maladie affecte 0.05% de la population. Un test T permet de dépister cette maladie avec la fiabilité suivante :

T est positif pour 99% des personnes affectées par la maladie
T est négatif pour 95% des personnes non affectées par la maldie.

1. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit affecté par la maladie.
2. Calculer la probabilité qu'un individu soit non malade quand le test est négatif

Exercice 1.6.
Soit A et B deux événements indépendants de probabilités respectives $\mathbb{P}(A) = 0.3$ et $\mathbb{P}(B) = 0.7$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \cup \overline{B})$.