L'irréductibilité de la première équation de Painlevé

Définition. *Un feuilletage de codimension deux sur* $\mathbb{C}^n$ *est dit réductible si il existe une suite d'extensions de corps différentiels*

$$\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n) = K_0 \subset K_1 \dots \subset K_p$$

et 2 intégrales premières indépendantes dans K_p *telles que les extensions intermédiaires* $K_i \subset K_{i+1}$ *soient*

- *des extensions algébriques,*
- *des extensions fortement normales*
- *ou des extensions par une intégrale première non constante d'un feuilletage de codimension un :* $K_{i+1} = K_i(<H>)$ *avec* $dH \wedge \omega = 0$ *pour une 1-forme intégrable à coefficients dans* K_i.

Théorème. *Le feuilletage de* $\mathbb{C}^3$ *défini par le champ de vecteurs* $X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x) \frac{\partial}{\partial y'}$ *est irréductible.*

Un théorème de M. Singer

Définition. *Une extension de corps différentiels* $K \subset L$ *est liouvillienne si il existe une suite d'extensions*

$$K = K_0 \subset K_1 \ldots K_{\ell-1} \subset K_\ell = L$$

avec

- $K_i \subset K_{i+1}$ *est algébrique,*
- $K_{i+1} = K_i(H)$ *avec* $dH = \omega_i$ *ou* $dH = H\omega_i$; ω_i *est une forme à coefficients dans* K_i*,*

Théorème. *Un feuilletage de codimension 1 défini par une 1-forme* ω *à coefficients dans* K *admet une intégrale première liouvillienne si et seulement si il existe une forme fermée* α *(à coefficients dans* K*) telle que* $d\omega = \alpha \wedge \omega$*.*

Le groupoïde de Galois d'un feuilletage

J^* : l'espace des jets de transformations de $\mathbb{C}^n$

$$y = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} y^\alpha (x - x^0)^\alpha \quad \text{avec} \quad \delta = \det y_i^{\epsilon_j} \neq 0,$$

$\mathsf{O}_{J^*} = \mathbb{C}(x^0) \otimes \mathbb{C}(y^0) \left[y_i^\alpha, \frac{1}{\delta} \right]$ son anneau,

est un groupoïde "différentiel" :

- source $s(y) = x^0$ et but $t(y) = y^0$,
- composition des series formelles y et z,
- inversion des séries formelles,
- n dérivations de O_{J^*} donnée par $(D_i E)(y) = \frac{\partial}{\partial x_i} E(y)$.

Définition. *Le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est le plus petit sous-groupoïde contenant les flots des champs tangents au feuilletage et défini par un idéal de O_{J^*} radical et différentiel.*

Le groupoïde de Galois de P_1

Théorème. [$\sim$ Lie-Cartan] *Si le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}_{X_1}$ n'est pas le groupoïde d'invariance de $i_{X_1}dx \wedge dy \wedge dy'$ alors on est dans un des cas suivant :*

- $Gal(\mathcal{F}_{X_1})$ *est intransitif :*
  $\mathcal{F}$ admet une intégrale première rationnelle,

- $Gal(\mathcal{F}_{X_1})$ *est imprimitif en codimension un :*
  il existe une forme algébrique intégrable s'annulant sur $\mathcal{F}$,

- $Gal(\mathcal{F}_{X_1})$ *est transversalement affine :*
  il existe un vecteur de formes algébriques $\Omega^0 = \begin{pmatrix} \omega_1^0 \\ \omega_2^0 \end{pmatrix}$ nul sur $\mathcal{F}$ et une matrice de formes algébriques Ω^1 de trace nulle telle que:
  $$d\Omega^0 = \Omega^1 \wedge \Omega^0 \quad et \quad d\Omega^1 = \Omega^1 \wedge \Omega^1.$$
  Une telle suite sera appelée suite de Godbillon-Vey de type asl_2 ou encore asl_2-suite.

Théorème. $Gal(\mathcal{F}_{X_1})$ *est le groupoïde d'invariance de* $i_{X_1}dx \wedge dy \wedge dy'$

Le degré de transcendance différentielle d'un système d'e.d.p.

$J(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p) = \varprojlim J_\ell(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^p)$ les espaces des jets d'applications de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^p$,

$\mathsf{O}_J = \varinjlim \mathsf{O}_{J_\ell}$ l'anneau des e.d.p en p fonctions de n variables,

I un idéal différentiel de O_J et Y_ℓ la sous-variété de J_ℓ définie par $I \cap \mathsf{O}_{J_\ell}$.

Définition. [Cartan, Ritt, Kolchin] *Le monôme $a\ell^b$ tel que $dim_{\mathbb{C}^n} Y_\ell \sim_\infty a\ell^b$ est le type de transcendance différentielle du système.*
b est le degré de transcendance différentielle.

Lemme. [Kolchin] *Le type de transcendance différentielle est bien défini pour une extension de corps différentiels.*
Soit $K \subset K_1 \subset K_2$ une suite d'extensions différentielles. Le degré de K_2/K est le maximum des degrés de K_2/K_1 et K_1/K.

Le groupoïde de Galois d'un feuilletage réductible.

I un idéal différentiel de $\mathsf{O}_{J(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2)}$: $Stab(I)$ est un sous groupoïde de J^* dont les solutions sont les ϕ tels que H est solution de I ssi $H \circ \phi$ est solution de I.

$\mathcal{F}$ un feuilletage réductible de $\mathbb{C}^n$ de corps de “réduction” K et I le noyau de $\mathsf{O}_{J(\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2)} \to K$ donné par les deux intégrales.

$x_1, \ldots, x_{n-2}$, $n-2$ coordonnées génériquement transverses au feuilletage et $inv(x_1, \ldots, x_{n-2})$ le groupoïde les laissant invariantes.

Lemme.
$Gal(\mathcal{F}) \cap inv(x_1, \ldots, x_{n-2}) \subset Stab(I) \cap inv(x_1, \ldots, x_{n-2})$ est de type linéaire.

Ceci prouve le théorème d'irréductibilité.