Intégrabilité des équations différentielles linéaires à paramètres d'après Cassidy-Singer

notes pour l'exposé

Guy Casale

Galois Theory of Parameterized Differential Equations and Linear Differential Algebraic Groups
http ://www4.ncsu.edu/ ~ singer/ms_papers.html
Special volume dedicated to Andrey Bolibrukh, of the series "IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics" (2005), chief editor V. Turaev, ed. B. Enriquez, C. Mitschi, C. Sabbah, R. Schaefke, EMS Publishing house.

Le but de cet exposé est de présenter le papier de Phyllis J. Cassidy et Mickael F. Singer qui expose une théorie de Galois des équations différentielles à paramètres. Je vais essentiellement donner des exemples et la définition du groupe de Galois à paramètres.

Le plan de l'exposé est le suivant :

1. Rappels sur le groupe de Galois d'une équation différentielle linéaire,
2. Passage aux équations à paramètres,
3. C-S intégrabilité et déformation isomodromique,
4. Groupe de Galois du temps d'un hamiltonien complétement intégrable.

1 Le groupe de Galois d'une connexion intégrable

Je vais commencer par donner le point de vue "géométrique naïf" sur la théorie de Picard-Vessiot avant de donner les versions "algébriques naïves" de ces constructions.

1.1 Géométriquement ...

Soient X une variété algébrique sur $\mathbb{C}$ et E un fibré vectoriel sur X. Soit ∇ une connexion linéaire rationnelle intégrable (= de courbure nulle) sur E. Comprendre les solutions de cette connexion, c'est comprendre un système fondamental de solutions ou de manière équivalent comprendre la résolvante du système. Autrement dit, nous allons étudier une solution particulière de la connexion suivante. Soit ∇_R la connexion induite par ∇ sur le $GL_n(\mathbb{C})$ fibré

principal R sur X associé à E. Ce fibré est le fibré des repères linéaires de E. Des propriétés de la connexion, on déduit que l'on passe d'une solution à une autre en faisant agir $GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{S}$ le graph d'une solution de ∇_R dans R et $\overline{\mathcal{S}}$ sa clotûre de Zariski. Cette variété est une variété algébrique sur X qui est un $G(\subset GL_n(\mathbb{C}))$ fibré principal au point générique. Cela signifie $\overline{S}\otimes\mathbb{C}(X)$ est un espace principal sous $G\otimes\mathbb{C}(X)$ en tant que variété algébrique sur $\mathbb{C}(X)$.

Ce groupe G est le groupe de Galois de la connexion.

Remarque 1.1 1°) *L'action de $GL_n(\mathbb{C})$ est donnée par les sections plates de la connexion induite sur $End(E)$, le fibré des automorphismes des fibres de E.*

2°) *La solution S est une variéte analytique qui est un revêtement de X privée du lieu singulier de la connexion. En ce sens là, c'est aussi un fibré principale sous un groupe discret : le groupe de monodromie de ∇.*

3°) *Dans le cas non singulier, G est le plus petit sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que les transitions de E puissent être choisies dans G, i.e. c'est la clotûre de Zariski de la monodromie.*

Dans le cas singulier-régulier, cette remarque est encore valide.

Pour espérer une "vraie" théorie de Galois avec notamment une correspondance, il faut introduire des corps abstraits.

1.2 ... et algébriquement

Soit k un corps munit de n dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_m$. On note $c_{ij}^{\ell} \in k$ les fonctions de structure des dérivations, *i.e.* $[\partial_i, \partial_j] = \sum c_{ij}^{\ell}\partial_{\ell}$. Son corps des constantes k^{∂} sera supposé être $\mathbb{C}$ dans un premier temps. Une équation différentielle linéaire totale sur k est un système (E) de la forme suivante :

$$\partial_i y = A_i y, i \in \{1, \ldots, m\}$$

avec y un vecteur de longueur n et $A_i \in gl_n(k)$ sont des matrices vérifiant les hypothèses d'intégrabilité

$$\sum c_{ij}^{\ell} A_{\ell} = \partial_i A_j - \partial_j A_i - [A_i, A_j]\,.$$

La construction du "torseur" $\overline{\mathcal{S}}$ se fait de la manière algébrique suivante. On construit un corps K engendré par un système fondamentale de solutions appelé extension de Picard-Vessiot de la manière suivante. Un système fondamentale de solutions est une matrice $Y \in GL_n(?)$ telle que $\partial_i Y = A_i Y, i \in \{1, \ldots, m\}$. Construisons ? abstraitement.

On considère l'anneau

$$A = k[Y_{i,j}, det(Y)^{-1}]$$

muni de l'action des ∂ induite par les équations. Cet anneau est aussi muni d'une action de $GL_n(\mathbb{C})$ par mutiplication à droite sur Y. Cette action est différentielle dans le sens où elle

commute aux ∂. Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel maximal de cet anneau. On pose alors $K = \mathbb{C}(A/I)$ le corps des fractions de A/I. Le groupe de Galois est

$$Gal((E)/k) = Aut_\partial(K/k) = \{k - \text{automorphismes de } K \text{ commutant aux } \partial\}.$$

Ce groupe est le sous-groupe algébrique de $GL_n(\mathbb{C})$ fixant l'idéal I.

Cette construction est la base de la définition d'extension de Picard-Vessiot "abstraite". La notion de normalité de l'extension n'est pas claire dans ce contexte. Pour l'expliciter, il est nécessaire d'introduire les extensions fortement normales mais c'est trop compliqué pour ces notes.

Dans le contexte de cette définition, on peut obtenir une correspondance de Galois entre les extensions différentielles intermédiaires de K/k et les sous-groupes algébriques de $Gal((E)/k)$

Remarque 1.2 1°) *Pour obtenir la correspondance, il est très important de supposer que le corps des constantes soit algébriquement clos afin de mettre la main sur tous les sous-groupes nécessaires.*

2°) *La correspondance avec l'approche géométrique est dim = #derivations, connexion = equations, intégrabilité = intégrabilité,* $\mathbb{C}(\overline{\mathcal{S}}) = K$*, automorphisme plat = automorphisme qui commute aux dérivations, etc ...*

2 ... avec des paramètres

Une équation à paramètre (en opposition à totale) c'est

$$\frac{\partial}{\partial x_i} Y = A_i(x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_p) Y, i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Un première idée est de recopier ce que l'on vient de faire en introduisant un corps de constantes plus gros, *i.e.* en remplaçant $\mathbb{C}$ par un $\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_p)$. On obtient ainsi un groupe $G(\overline{\mathbb{C}(t_1, \ldots, t_p)}^{alg})$. Si c'est pour ca, c'était pas la peine de faire un exposé! Pour savoir ce que l'on cherche à construire, regardons un exemple.

Exemple 1

On considère l'équation $\partial_x y = \frac{t}{x} y$.

$$Gal_\partial(K/k) = \begin{cases} - \ \mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{C}(t)}^{alg}) \text{ si } t = t \\ - \ \mathbb{C}^* \text{ si } t \in \mathbb{C} - \mathbb{Q} \\ - \ \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \text{ si } t = \frac{p}{q}. \end{cases}$$

Le premier groupe est vraiement trop gros. Comme on sait intégrer cette équation, on connait la réponse (heuristiquement) dans ce cas : regardons-la!

Calcul heuristique du groupe de Galois de l'exemple 1

La solution de l'équation est $y = x^t$. L'indétermination de la solution (= action de ce que devrait être le groupe de Galois) est de la forme

$$y \to ya(t).$$

Mais d'un autre coté, on sait que $\partial_t y = y \log x$. Le symbole $\log x$ est défini par une équation ne dépendant pas de paramètres et son indétermination est de la forme

$$\log x \to \log x + c, c \in \mathbb{C}.$$

En calculant les l'indétermination de chaque membres de $\partial_t y = y \log x$ on a

$$\partial_t y \to \partial_t y(a + \frac{a'}{\log x})$$

et

$$y \log x \to y \log x(a + \frac{ca}{\log x}).$$

D'où le groupe de Galois (qu'il reste à définir) de cette équation agit sur y par $y \to ya(t)$ avec $\left(\frac{a'}{a}\right)' = 0$. Ceci implique $a = c_1 e^{c_2 t}$ où c_1 et c_2 sont dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire que notre groupe est $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$! C'est un groupe beaucoup plus petit que $\mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{C}(t)}^{alg})$. D'un autre coté, ce groupe n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{G}_m(\overline{\mathbb{C}(t)}^{alg})$. C'est un groupe algébrique mais qui agit transcendalement via l'exponentielle.

2.1 Groupe algébrique différentiels (lineaires)

Le groupe que nous avons obtenu précédemment est un groupe par chance ! Si l'équation différentielle portant sur a avait été un peu plus compliquée ses solutions n'auraient pas été aussi simples que l'exponentielle et on aurait pas eu de groupe.

Sa structure naturelle est plutôt celle d'un faisceau en groupe. Considéront le produit $\mathbb{G}_a(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}_t$ en groupe multiplicatif sur la droite (de coordonnée t). Ce produit détermine un faisceau en groupe en considérant les groupes des sections locales. Certains sous-faisceaux en groupes de celui-ci sont plus beaux que d'autre. Pour certain la beauté sera d'être constitué de sections globales (rationnelles, algebriques, entières etc ...) mais pour moi (... et d'autres) ce qui est intéressant c'est de considérer les sous-faisceaux en groupes constitués par les solutions d'équations différentielles, comme c'est le cas dans l'exemple 1. Prenez n'importe quelle équation différentielle linéaire à une inconnue sur $\mathbb{C}$, le faisceau de ses solutions est un exemple.

`À partir de maintenant, l'espace de paramètres sera munit de dérivations`

On notera $\eth_1, \ldots, \eth_p$ ses dérivations.

On a vu que $\mathbb{C}(t)$ et sa clôture algébrique ne sont pas assez gros pour contenir les fonctions décrivant le groupe que l'on aimerait obtenir. Pour cela il faudrait rajouter à ce corps des solutions à toutes les équations différentielles, c'est la clotûre différentielle.

Définition 2.1 *Un corps différentiel $(k, \eth s)$ est différentiellement clôt si quelque soit le système d'e.d.p. sur k engendré par $P_i(f_1, ..., f_q), i = 1, \ldots, \ell$ et quelque soit l'e.d.p. $Q(f_1, ..., f_q)$, si il existe une solution à $P_i = 0, i = 1, \ldots, \ell$ et $Q \neq 0$ dans une extension de k, il en existe une dans k.*

La preuve de l'existence de tel corps et d'un "minimal" parmi une famille ne sera ni faite ici ni laissée au lecteur. On consultera les références de l'article dont il est question dans cet exposé.

La clôture différentielle de k sera noté $\overline{k}^{diff}$

Définition 2.2 *Soit $(k, \eth s)$ un corps différentiellement clôs. Un sous-groupe $G \subset GL_n(k) \subset k^{n^2}$ est un groupe algebrique différentiel si il existe un système d'e.d.p. en n^2 inconnues sur k telles que G soit l'ensemble des solutions de ce système de déterminant non nul.*

On peut trouver dans la littérature (surtout aux noms de Cassidy ou Buium) beaucoup de résultats sur ces bestioles, notamment dans le cas d'un groupe sur un corps différentiel ordinaire (une seule dérivation).

Les sous-groupes différentiels de $(k, +)$ sont décrit par les équations differentielles lineaires en un inconnue sur k. Ceux de $(k^*, \times)$ sont decrit par des équations différentielles linéaires en $\frac{\eth a}{a}$. On a même une classification des groupes différentielles algébriques semi-simple dû a Cassidy ; voir aussi Buium et Pillay dans le cas ordinaire.

2.2 Extensions de Picard-Vessiot à Paramètre, (dites PPV)

Considérons un corps k munit d'une algèbre de Lie de dérivations vérifiant les hypothèses suivantes. Cette algèbre admets un idéal engendré par $\eth_1, \ldots, \eth_p$: les dérivations par rapport aux paramètres, noté $\eth$. Cet idéal admets une sous-algèbre supplementaire engendrée par les $\partial_1, \ldots, \partial_m$: les dérivation par rapport aux "variables", celle-ci est noté ∂. La condition importante étant que la projection de l'algèbre $\eth$ dans l'algèbre des $\mathbb{C}$-dérivations de k^∂ est injectif.

Une équation differentielle linéaire à parametres est un système (E) :

$$\partial_i y = A_i y, i \in \{1, \ldots, m\}$$

avec y un vecteur de longueur n et $A_i \in gl_n(k)$ sont des matrices vérifiant les hypothèses d'intégrabilité relative à l'algèbre ∂.

Pour construire l'extension PPV associée à (E), il faut commencer par supposer soit que k $\eth$-différentiellement clôt (en tant que corps différentielle n'ayant que les dérivations paramétriques) soit que k^∂ est $\eth$-différentiellement clôt ; je ne sais pas quelle hypothèse choisir. La construction suit ensuite le même chemin.

On ajoute à k les coefficients $Y_{i,j}$ d'une matrice inconnue *i.e.* $k[Y_{i,j}, det(Y)^{-1}]$. Il nous faut déterminer les dérivées des $Y_{i,j}$. Pour les ∂-dérivées pas de problèmes elles sont données par les

équations. Pour les $\eth$-dérivés on n'a pas le choix, on ajoute de nouveau symbole $Y_{i,j}^{\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^p$ et $\eth_\ell Y_{i,j}^{\alpha} = Y_{i,j}^{\alpha+\epsilon_\ell}$, les ∂-dérivées de ces nouveaux symboles se calculant grace aux équations. Cet anneau différentiel est noté A. Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel maximal de cet anneau. Une extension PPV de (E) est donnée par le corps $K = \mathbb{C}(A/\mathcal{I})$ des fractions de $A/\mathcal{I}$

Définition 2.3 *Le groupe de Galois de* (E) *est* $Aut_{(\partial+\eth)}(K/k)$*, le groupe des* k*-automorphismes de corps commutant à toutes les dérivations.*

Théorème 2.4 $Gal((E)/k)$ *est* $G(k^{\partial})$ *où* G *est un groupe algébrique* $\eth$*-différentiel sur le corps des* ∂*-constantes de* k*.*

Preuve de l'unicité du groupe du Galois. La preuve consiste à prendre deux idéaux $\mathcal{I}_1$ et $\mathcal{I}_2$ et à considérer les morphismes σ_1 et σ_2 des deux anneaux A_1 et A_2 dans $A_3 = (A_1 \otimes_k A_2)/\mathcal{J}$ avec la structure différentiel classique des produit sur $A_1 \otimes_k A_2$ et $\mathcal{J}$ un idéal différential maximal de cet anneau. Ces morphismes étant différentiels et les anneaux n'ayant pas d'idéaux différentiels non trivial, ils sont injectifs. Les deux images de la matrice $(Y_{i,j})$ étant solution de la même équation différentielle linéaire dans un anneaux sans idéal différentiel, $\sigma_1 Y = \sigma_2 Y C$ avec C à coefficients dans k^{∂}. CQFD

On a une correspondance de Galois.

La description géométrique de ce groupe dans l'esprit du début de l'exposé est laissé au lecteur en attendant que je l'écrive.

3 C.-S. Intégrabilité d'une équation à paramètres

4 Hamiltoniens complètement intégrables