Irréductibilité de la première équation de Painlevé ⋆

Guy Casale

Departament de matemàtiques, Edifici C campus de la UAB, 08193 Bellaterra (Cerdanyola del Vallès), Spain

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par

Résumé

Nous proposons une définition de réductibilité pour les feuilletages algébriques de codimension deux définie par une 2-forme fermée et donnons une caractérisation du groupoïde de Galois d'un feuilletage réductible. Dans le cas du feuilletage donné par la première équation de Painlevé, nous calculons son groupoïde de Galois et prouvons ainsi son irréductibilité. *Pour citer cet article : A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

Abstract

Irreducibility of the first Painlevé equation A definition of reducibility for algebraic codimension two foliations given by closed 2-forms is proposed. Reducible foliations are characterised on theirs Galois groupoids. We apply this to the foliation given by the first Painlevé equation. Its Galois groupoid is computed and this proves its irreducibility. *To cite this article: A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005).*

1. Introduction

Dans [9], P. Painlevé donne une définition de la réductibilité d'une solution d'une équation différentielle et donne dans [10] une caractérisation des équations du second ordre sans point singulier mobile dont toutes les solutions sont réductibles. K. Nishioka [8] et H. Umemura [11] étudient les équations ayant une solution réductible (en un sens legèrement plus général que celui de Painlevé) et prouvent l'irréductibilité des solutions de la première équation de Painlevé. La notion de réductibilité pour un feuilletage n'a jamais été clairement définie. Par analogie, nous dirons qu'un feuilletage est réductible lorsqu'il existe un système d'intégrales premières particulières construites à partir de fonctions plus simples : solutions de systèmes linéaires complètement intégrales, intégrales premières de feuilletages de codimension un ou solutions de systèmes linéaires complètement intégrables avec un paramètre [4]. Les relations entre la

⋆ Ce travail a été réaliser lors d'un séjour post-doctoral à l'Université de Tokyo financé par la J.S.P.S. (FY2004)

Email address: `casale@picard.ups-tlse.fr`, `casale@mat.uab.es` (Guy Casale).

réductibilité d'une équation différentielle et la réductibilité du feuilletage sous-jacent ne sont pas claires et seront étudiées ultérieurement. Dans le cas d'un feuilletage donné par une 2-forme fermée, la définition proposée dans [3] s'écrit de la manière suivante.

Définition 1.1 *Un feuilletage algébrique de codimension deux sur $\mathbb{C}^n$ décrit par une 2-forme fermée est dit réductible si il existe une intégrale première dans une extension de corps différentiels K_p de $\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n)$ et une suite d'extensions de corps différentiels*

$$\mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n) = K_0 \subset K_1 \ldots \subset K_p$$

telle que les extensions intermédiaires $K_i \subset K_{i+1}$ soient

- *algébriques,*
- *$K_{i+1} = K_i(h_1,\ldots,h_\ell)$ avec $dh_q = \sum h_j \omega_q^j$, $\omega_q^j \in K_i$; ou plus généralement K_{i+1}/K_i est fortement normale* [6]*,*
- *$K_{i+1} = K_i(< H >)$ avec $dH \wedge \omega = 0$ pour une 1-forme intégrable à coefficients dans K_i : K_{i+1} est le corps différentiel engendré par une intégrale première d'un feuilletage de codimension un.*

Dans cette note nous présentons les éléments de la preuve du théorème suivant (voir [3] pour les détails).

Théorème 1.2 *Le feuilletage défini par $P_1 : \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x$ est irréductible au sens des feuilletages.*

La preuve de ce théorème utilise de manière essentielle le groupoïde de Galois d'un feuilletage introduit par B. Malgrange dans [7] et certaines parties de la classification analytique locale des pseudo-groupes de Lie agissant sur $\mathbb{C}^2$ établie par S. Lie et É. Cartan [1].

2. Le groupoïde de Galois d'un feuilletage réductible

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage algébrique de $\mathbb{C}^n$. Pour une définition du groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$, nous renvoyons le lecteur à [7], nous ne donnerons ici que quelques idées. Considérons l'anneau des équations aux dérivées partielles en n fonctions de n variables :

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}(x_1,\ldots,x_n) \otimes \mathbb{C}(z_1,\ldots,z_n)\,[\, z_i^\alpha ; i \in \{1,\ldots,n\}, \alpha \in \mathbb{N}^n]\,.$$

Cet anneau est filtré par les anneaux des équations d'ordre q : $\mathcal{A}_q$ et il est munit de n dérivations : les dérivations des équations par rapports aux variables x_i. Cet anneau est l'anneau des fonctions sur les difféomorphismes formelles de $\mathbb{C}^n$ au point générique. Il hérite des formules de composition et d'inverstion des séries formelles une structure d'algèbre de Hopf dont nous noterins c^* le coproduit. Si une transformation de $\mathbb{C}^n$ est solution d'une équation de $\mathcal{A}$, il sera aussi solution de toutes les équations dérivées. Considérons l'ensemble de germes de transformations de $\mathbb{C}^n$ suivant :

$$\mathrm{T} = \{\ \varphi \text{ germe de } \exp X \text{ pour tout champ de vecteurs local } X \text{ tangent au feuilletage } \}$$

et $\mathcal{I}$ l'idéal maximal de $\mathcal{A}$ stable par composition ($c * \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{I}$) s'annulant sur T. C'est un idéal différentiel radical. Il décrit un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie au sens de [7] ; c'est le groupoïde de Galois du feuilletage, $Gal(\mathcal{F})$. Lorsque le feuilletage est donné par une équation différentielle ordinaire, il existe une fibration génériquement transverse naturelle donnée par la variable indépendante que nous supposerons être x_1. L'idéal différentiel engendré par l'équation $x_1 - z_1 = 0$ est l'exemple le plus simple de $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie, nous le noterons $Inv(x_1)$. Le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $Gal(\mathcal{F}) \cap Inv(x_1)$ agit simplement sur les jets d'intégrales premières. Dans [2], nous avons montré que ce groupoïde laisse invariant n'importe quel ensemble d'intégrales premières décrit par un système d'équations aux dérivées partielles. Dans le cas d'un feuilletage décrit par des équations différentielles linéaires, ceci permet de montrer que l'action de ce groupoïde sur les solutions redonne l'action du groupe de Galois différentiel.

La taille d'un système d'équations aux dérivées partielles est mesurée par son polynôme de Hilbert différentiel. Soit

$$\mathcal{B} = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \otimes \mathbb{C}[z_1, \dots, z_p]\, [\, z_i^{\alpha}; i \in \{1, \dots, p\}, \alpha \in \mathbb{N}^n]$$

l'anneau différentiel des équations aux dérivées partielles en p fonctions de n variables.

Définition 2.1 *Soient $\mathcal{I}$ un idéal différentiel de $\mathcal{B}$, $\mathcal{I}_q$ ses équations d'ordre q et $Y_q =$ spec $\mathcal{B}_q/\mathcal{I}_q$. La suite $dim_{\mathbb{C}^n} Y_q$ est interpolée pour de grandes valeurs de q par un polynôme : le polynôme de Hilbert différentiel. Le type différentiel de $\mathcal{I}$ est le monôme de plus haut degré de ce polynôme.*

Remarque 1 Le type différentiel du $\mathcal{I}$ ne dépend en fait que de l'extension différentielle de $\mathbb{C}(x_1, \dots, x_n)$ donnée par $\lim\limits_{\rightarrow} \mathbb{C}(Y_q)$.

Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{C}^n$ donné par une 2-forme fermée. Supposons que les $n-2$ premières coordonnées soient génériquement transverses à $\mathcal{F}$.

Proposition 2.2 *Si le feuilletage est réductible alors $Gal(\mathcal{F}) \cap Inv(x_1, \dots, x_{n-2})$ est de type différentiel linéaire.*

3. Irréductibilité de P_1

Le feuilletage donné par P_1 est décrit par le champ de vecteurs

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + y' \frac{\partial}{\partial y} + \left(6y^2 + x\right) \frac{\partial}{\partial y'}.$$

Ce champ a une divergence nulle : il préserve la forme $dx \wedge dy \wedge dy'$. Le feuilletage peut être défini par la 2-forme fermée $\gamma = i_{X_1} dx \wedge dy \wedge dy'$. De plus, quelque soit le champ de vecteurs X tangent au feuilletage, celui-ci préserve la 2-forme γ : $L_X \gamma = 0$. Ceci entraine que les flots, φ, des champs tangents au feuilletage satisfont les équations aux dérivées partielles $\varphi^* \gamma = \gamma$.

Théorème 3.1 *Le groupoïde de Galois du feuilletage donné par P_1 est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles $\varphi^* \gamma = \gamma$.*

Avec la proposition 2.2 et le lemme suivant, ce thérorème prouve le théorème 1.2.

Lemme 3.2 *Le système d'équations aux dérivées partielles sur φ donné par $\varphi^* \gamma = \gamma$ et $x \circ \varphi = x$ est de type différentiel quadratique.*

4. Le groupoïde de Galois de P_1 : preuve du théorème 3.1

Pour calculer $Gal(\mathcal{F}_{P_1})$, nous utiliseront la proposition suivante.

Proposition 4.1 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de $\mathbb{C}^n$ de codimension deux, défini par une 2-forme fermée γ. Si le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ n'est pas $Inv(\gamma)$ alors on est dans un des cas suivant :*

- *$Gal(\mathcal{F})$ est* intransitif *: $\mathcal{F}$ admet une intégrale première rationnelle,*
- *$Gal(\mathcal{F})$ est* imprimitif *en codimension un : il existe une 1-forme algébrique intégrable nulle sur $\mathcal{F}$,*
- *$Gal(\mathcal{F})$ est* transversalement affine *: il existe un vecteur de 1-formes algébriques $\Omega^0 = (\omega_1^0, \omega_2^0)^t$ définissant le feuilletage et une matrice de 1-formes algébriques Ω^1 de trace nulle telle que :*

$$d\Omega^0 = \Omega^1 \wedge \Omega^0 \quad \text{et} \quad d\Omega^1 = \Omega^1 \wedge \Omega^1.$$

Cette proposition est prouvée localement par S. Lie pour les pseudo-groupes de transformations de $\mathbb{C}^2$. Dans le même contexte, É. Cartan donne dans [1] une preuve complètement algébrique de ce résultat. Cette preuve se généralise aux $\mathcal{D}$-groupoïdes de Lie s'annulant sur les flots d'un feuilletage de codimension deux.

Idée de la preuve du théorème 3.1. – Une première série de lemmes nous permettent de montrer que les formes différentielles données par la proposition 4.1 peuvent être supposées polynomiales. Prolongeons le feuilletage à un paramètre α par le changement de variable ($x \to \alpha x$; $y \to \alpha^{-2}y$; $y' \to \alpha^{-3}y'$) ; le champ X_1 est alors prolongé par

$$X_\alpha = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + \left(6y^2 + \alpha^5 x\right)\frac{\partial}{\partial y'}.$$

Nous pouvons prolonger chacune des trois structures géométriques données par la proposition 4.1 au paramètre α puis développer les formes en puissances de α et calculer chaques coefficients.

Les calculs pour la première structure géométrique (donnée par une intégrale première rationnelle H) sont fait dans [10]. On prolonge H en une intégrale première H_α de X_α et on suppose $H_\alpha = \sum_{i\geq 0} \alpha^i H_i$ avec $dH_0 \neq 0$. En calculant les différents H_i, on obtient que H_5 existe et est rationnel si et seulement si $dH_0 = 0$ ce qui prouve que $Gal(\mathcal{F}_{P_1})$ est transitif.

Les calculs pour la deuxième structure géométrique (donnée par une forme intégrable ω) sont commencés dans [5]. Prolongeons la forme au paramètre α. On peut supposer que $\omega_\alpha = \sum \alpha_i \omega_i$ est polynomiale et $\omega_0 \neq 0$. Un lemme de [5] permet de supposer de plus que $i_{X_\alpha} d\omega_\alpha = 0$ $(*)$. Deux cas doivent être examiner suivant que ω_0 soit fermée ou non. Dans chacun de ces cas, en développant $(*)$, on obtient que ω_5 existe et est rationnelle si et seulement si ω_0 est nulle. Ceci prouve que $Gal(\mathcal{F})$ est imprimitif en codimension un.

La même méthode permet de prouver que $Gal(\mathcal{F})$ n'est pas transversalement affine. Contrairement à ce qui est annoncé dans [5], lorsqu'on prolonge les formes Ω^0 et Ω^1 au paramètre, on ne peut pas les supposer polynomiales en α. À chaque choix de Ω^0 correspond une unique matrice de trace nulle Ω^1. En choisissant $\Omega^0 = \left(y'dy' - (6y^2 + x)dy, y'^{-1}dy' - dx\right)^t$, la matrice Ω^1 aura un pôle le long de $\{y' = 0\}$. Posons $\Omega^1 = \sum_{i\geq -n} \alpha^i \Xi_i$. Une étude directe de X_0 montre que n est positif. En développant les équations satisfaites par ces formes, on calcule Ξ_{-n}. Deux cas se présentent suivant que $d\Xi_{-n}$ soit nulle ou non. Ici encore on montre dans chaque cas que l'existence d'une matrice de formes rationnelles satisfaisant les équations de Ξ_{-n+5} est équivalente à la nullité de Ξ_{-n}. Ceci prouve que $Gal(\mathcal{F})$ n'est pas transversalement affine et achève la preuve du théorème. □

Références

[1] É. Cartan - *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. École Normale Sup. **25** (1908) 57–194

[2] G. Casale - *Sur le groupoïde de Galois d'un feuilletage* Thèse de l'Université Paul Sabatier (2004), disponible sur `http ://doctorants.picard.ups-tlse.fr/theses.htm`

[3] G. Casale - *Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité* en préparation, diponible sur arXiv : math.DS/0510657

[4] P.J. Cassidy et M.F. Singer - *Galois theory of parametrized differential equations and linear differential algebraic groups* To appear in the special volume dedicated to Andrey Bolibrukh, of the series "IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics" (2005)

[5] J. Drach - *Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé*, Bull. Sci. Math. **39** (1915) 149–166

[6] E.R. Kolchin - *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic Press (1973)

[7] B. Malgrange - *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*, Monographie **38** vol **2** de L'enseignement mathématique (2001)

[8] K. Nishioka - *A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent*, Nagoya Math. J. **109** (1988) 63–67

[9] P. Painlevé - *Leçons de Stokholm* (1875), Oeuvres complètes Tome **1**, éditions du CNRS (1972)

[10] P. Painlevé - *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme*, Bull. Soc. Math. **28** (1900) 201–261

[11] H. Umemura - *On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé*, Alg. Geom. and Com. Alg. in honor of M. Nagata (1987) 771–789