C. R. Acad. Sci. Paris, t. 332, Série I, p. 1–??, 2002 – PXMA????.TEX –
Rubrique/*Heading*
(Sous-rubrique/*Sub-Heading*)

Suites de Godbillon-Vey et Intégrales premières

Guy Casale

Laboratoire E.Picard Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse cedex 4
Courriel : casale@picard.ups-tlse.fr

(Reçu le jour mois année, accepté après révision le jour mois année)

Résumé. Nous montrons qu'une 1-forme sur un corps différentiel de caractéristique nulle admet une intégrale première d'un type de transcendance particulier (appellé Riccati) si et seulement si cette forme admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur ce corps. © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Godbillon-Vey sequences and first integrals

Abstract. *We prove that a 1-form on a zero characteristic differential field admits a first integral whith a special type of transcendance (Riccati type) if only if it admits a Godbillon-Vey sequence of length 3 on this field.* © 2002 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Notation. – M est un corps différentiel de caractéristique nulle, de dérivations $\partial_1, \ldots, \partial_l$ qui commutent et sont linéairement indépendantes. Le dual du M-module des dérivations sera Ω^1_M le M-module des 1-formes différentielles de M. Soit K une extension différentielle de M ; nous noterons $\Omega^1_K = K \otimes_M \Omega^1_M$.

1. Introduction

Une suite de Godbillon-Vey sur K pour une 1-forme ω est une suite de 1-formes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ appartenant à Ω^1_K telle que :

$$\begin{array}{rcl} d\omega & = & \omega \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 & = & \omega \wedge \omega_2 \\ d\omega_n & = & \omega \wedge \omega_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \omega_k \wedge \omega_{n-k+1} \end{array}$$

Remarque 1.1. – *(voir [1])*
– *Si ω admet une suite de Godbillon-Vey alors elle est intégrable* ($\omega \wedge d\omega = 0$).
– *Réciproquement si ω est intégrable alors pour toute dérivation X telle que $\omega(X) = 1$, la suite définie par $\omega_1 = \mathrm{L}_X \omega$ et $\omega_{i+1} = \mathrm{L}_X \omega_i$ est une suite de Godbillon-Vey pour ω*
– *Si ω admet une suite de Godbillon-Vey $\omega_1, \ldots, \omega_n, \ldots$ alors la suite $\omega_1 + \frac{df}{f}, \ldots, \frac{1}{f^{n-1}}\omega_n, \ldots$ est une suite de Godbillon-Vey pour la forme $f\omega$.*

Note présentée par

S0764-4442(00)0????-?/FLA

Nous regarderons les formes admettant une suite de longueur finie (une suite est dite de longueur p si $\omega_i = 0$ pour $i \geq p$).

PROPOSITION 1.2. – *Etant donnée une équation aux dérivées partielles $dG + \frac{G^n}{n!}\gamma_n + \ldots + \gamma_0 = 0$ avec γ_i dans Ω^1_K, si cette équation admet une solution G dans une extension différentielle de K et si G est transcendante sur K alors les γ_i forment une suite de Godbillon-Vey pour γ_0.*

Preuve. – L'existence d'une solution implique que

$$0 = ddG = \sum_i G^i \left(\frac{d\gamma_i}{i!} - \sum_{p+q=i} \frac{\gamma_p \wedge \gamma_{q+1}}{p!q!} \right)$$

Si cette solution est transcendante, nous obtenons une suite de Godbillon-Vey de longueur n+1 pour γ_0. □

Plus précisement, nous nous intéresserons au formes ω admettant des suites de Godbillon-Vey de longueur 2 ou 3. Une intégrale première de ω est un élément H d'une extension différentielle de M vérifiant $dH \wedge \omega = 0$.

DÉFINITION 1.3. – *Une extension différentielle sera dite Liouvillienne si elle est obtenue par une suite d'extensions du type $K \subset K(G)$ avec G algébrique ou transcendant vérifiant $dG = G\gamma_1 + \gamma_0$ avec γ_1 et γ_0 dans Ω^1_K. Les éléments d'une telle extension seront dit Liouvillien.*

Les relations entre l'existence d'une suite de Godbillon-Vey de longueur finie et l'existence d'une intégrale première d'un type de transcendance particulier ont été étudiées par M. Singer dans [2] où il montre :

THÉORÈME 1.4. – *Un forme ω dans Ω^1_M admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur M si et seulement si elle admet une intégrale première Liouvillienne.*

Dans sa thèse [3], F. Touzet donne une preuve plus élémentaire de ce théorème due à J.P. Rollin. Nous nous proposons de redémontrer dans un premier temps ce théorème en utilisant la proposition 1.2 puis d'étendre ce résultat aux suites de longueur 3 :

DÉFINITION 1.5. – *Une extension différentielle sera dite de type Riccati si elle est obtenue par une suite d'extensions du type $K \subset K(G)$ avec G algébrique ou transcendant tel que $dG = \frac{G^2}{2}\gamma_2 + G\gamma_1 + \gamma_0$ avec γ_2, γ_1 et γ_0 dans Ω^1_K. Les éléments d'une telle extension seront dit de type Riccati.*

THÉORÈME 1.6. – *Une forme ω dans Ω^1_M admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur M si et seulement si elle admet une intégrale première de type Riccati.*

2. Une nouvelle preuve du Théorème de M. Singer

LEMME 2.1. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$, $M \subset K \subset K_1$ telle que K_1 soit algébrique sur K. Si ω admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur K_1 alors elle en admet une sur K.*

Preuve. – Soit $\widetilde{K_1}$ la cloture normale de K_1. En faisant agir un élément $\sigma \in Gal(\widetilde{K_1}/K)$ sur les relations de la suite de Godbillon-Vey , nous obtenons :

$$\begin{array}{rcl} d\omega &=& \omega \wedge \sigma(\omega_1) \\ \sigma(d\omega_1) &=& d(\sigma(\omega_1)) = 0. \end{array}$$

La moyenne des $\sigma(\omega_1)$ pour tous les σ dans $Gal(\widetilde{K_1}/K)$ nous fournit une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 dans K. □

LEMME 2.2. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$ et $K(G)$ une extension de $K \supset M$ par G vérifiant $dG = G\gamma_1 + \gamma_0$. Si ω admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur $K(G)$ alors elle en admet une sur K.*

Preuve. – Nous pouvons supposer que G est transcendante sur K et écrire ω_1 sous la forme $\frac{N(G)}{D(G)}$ avec $N \in \Omega^1_K[X]$ et $D \in K[X]$. Nous allons distinguer deux cas suivant que le degré de D soit positif ou nul.
1- le degré de D est positif.
Le lemme 2.1 nous permet de supposer que le corps K contient une racine g de D. Nous nous plaçons en cette racine en faisant le changement d'inconnue $H = G - g$. Comme

$$dH = H\gamma_1 + g\gamma_1 + \gamma_0 - dg = H\widetilde{\gamma_1} + \widetilde{\gamma_0},$$

la transcendance de H sur K assure que $\widetilde{\gamma_0}$, $\widetilde{\gamma_1}$ forment une suite de Godbillon-Vey. La forme ω_1 est une expression rationnelle en H et en effectuant la division suivant les puissances croissantes nous obtenons $\omega_1 = \frac{1}{H^n}\alpha_{-n} + \ldots$ avec $n > 0$ et $\alpha_i \in \Omega^1_K$.
L'équation $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ implique que $d\omega = \omega \wedge \alpha_0$ et $\omega \wedge \alpha_{-n} = 0$ et l'équation $d\omega_1 = 0$ implique que $\alpha_{-n} \wedge \widetilde{\gamma_0} = 0$ et $d\alpha_0 + \alpha_1 \wedge \widetilde{\gamma_0} = 0$. Si $\widetilde{\gamma_0}$ est non nulle, nous en déduisons que ω est un multiple de $\widetilde{\gamma_0}$ donc la suite de Godbillon-Vey sur K de $\widetilde{\gamma_0}$ en fournit une pour ω. Si $\widetilde{\gamma_0}$ est nulle, α_0 convient.
2- le degré de D est nul.
Dans ce cas, $\omega_1 = G^r\alpha_r + \ldots + \alpha_0$. L'équation $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ implique que $\omega \wedge \alpha_r = 0$ donc qu'il existe $F \in K$ telle que $\alpha_r = F\omega$. L'équation $d\omega_1 = 0$ implique que $d\alpha_r + r\alpha_r \wedge \widetilde{\gamma_1} = 0$. Un multiple de ω admets une suite de Godbillon-Vey sur K de longueur 2, il en est donc de même pour ω. □

Preuve du théorème 1.4. – Soit H une intégrale première de ω dans un corps K extension Liouvillienne de M. Par définition il existe F dans K tel que $dH = F\omega$ d'où $d\omega = \omega \wedge \frac{dF}{F}$, $\omega_1 = \frac{dF}{F}$ est une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur K pour ω. Par récurrence sur la longueur de l'extension, le lemme 2.2, nous permets de trouver une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur M. Réciproquement, à partir d'une suite de Godbillon-Vey ω, ω_1 de longueur 2 on construit une intégrale première de ω en résolvant successivement les équations $dF = F\omega_1$ puis $dH = F\omega$. □

3. Suite de Godbillon-Vey de longueur 3

LEMME 3.1. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$ et K une extension de M. Si elle admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur K alors, parmi toutes ses suites de Godbillon-Vey, elle en admet une de la forme ω, ω_1, ω_2 avec $\omega_1 \in \Omega^1_M$.*

Preuve. – Soient η_1 et η_2 dans Ω^1_K vérifiant :

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge \eta_1 \\ d\eta_1 &= \omega \wedge \eta_2 \\ d\eta_2 &= \eta_1 \wedge \eta_2 \end{aligned}$$

Prenons une dérivation X sur M vérifiant $\omega(X) = 1$ et posons $\omega_1 = L_X\omega$. Il faut ensuite construire ω_2. Comme $(\omega_1 - \eta_1) \wedge \omega = 0$, il existe $F \in K$ telle que $\omega_1 = \eta_1 + F\omega$. En prenant la différentielle on a $d\omega_1 = \omega \wedge (\eta_2 - dF + F\omega_1)$. La forme ω_2 est donc de la forme $\eta_2 - dF + F\omega_1 + G\omega$ pour un certain G dans K. Il faut déterminer le G tel que la troisième équation soit satisfaite. En calculant

$$d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 = d(G\omega) + Fd(F\omega) + Gd\omega,$$

on obtient $G = -\frac{1}{2}F^2$ donc $\omega_2 = \eta_2 - dF + F\omega_1 - \frac{F^2}{2}\omega$ convient. □

LEMME 3.2. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$, $M \subset K \subset K_1$ telle que K_1 soit algébrique sur K. Si ω admet une suite de longueur 3 sur K_1 alors elle en admet une sur K.*

Preuve. – Le lemme 3.1 nous permet de supposer que $\omega_1 \in \Omega^1_M$. Maintenant la preuve est la même que celle du lemme 2.1. Soit $\widetilde{K_1}$ la cloture normale de K_1. En faisant agir un élément $\sigma \in Gal(\widetilde{K_1}/K)$ sur les relations de la suite, nous obtenons :

$$\begin{array}{lllll} d\omega & = & \omega \wedge \sigma(\omega_1) & = & \omega \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 & = & d\sigma(\omega_1) & = & \omega \wedge \sigma(\omega_2) \\ d\sigma(\omega_2) & = & \sigma(\omega_1) \wedge \sigma(\omega_2) & = & \omega_1 \wedge \sigma(\omega_2) \end{array}$$

La moyenne des $\sigma(\omega_2)$ pour tous les σ dans $Gal(\widetilde{K_1}/K)$ nous fournit une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 dans K. $\square$

LEMME 3.3. – *Soient $\omega \in \Omega^1_M$ et $K(G)$ une extension de $K \supset M$ par G vérifiant $dG = \frac{G^2}{2}\gamma_2 + G\gamma_1 + \gamma_0$ avec γ_2, γ_1 et γ_0 dans Ω^1_K. Si ω admet une suite de longueur 3 sur $K(G)$, alors elle en admet une sur K.*

Preuve. – Grace aux lemmes précédents, nous pouvons supposer que G est transcendante sur K, $\omega_1 \in \Omega^1_M$, $\omega_2 = \frac{N(G)}{D(G)}$ avec $N \in \Omega^1_K[X]$ et $D \in K[X]$, et que les racines de D se trouvent dans K. Nous distinguerons les deux mêmes cas que précédement.
1-le degré de D est non nul.
A un changement de variable près nous pouvons supposer qu'après division suivant les puissances croissantes $\omega_2 = \frac{1}{G^n}\beta_{-n} + \ldots$ avec $\beta_i \in \Omega^1_K$ et $n > 0$. L'équation $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ implique $\omega \wedge \beta_{-n} = 0$, il existe donc $F \in K$ telle que $\beta_{-n} = F\omega$.
Si γ_0 est non nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\gamma_0 \wedge \beta_{-n} = 0$. La forme ω est un multiple de γ_0 et on obtient une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 pour ω à partir de celle de γ_0.
Si γ_0 est nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $d\beta_{-n} - n\beta_{-n} \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \beta_{-n}$. En remplaçant β_{-n} par $F\omega$ dans cette expression on obtient $d\omega = \omega \wedge \left(\frac{dF}{2F} + \frac{n\gamma_1}{2}\right)$, c'est-à-dire une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 dans K.
2-le degré de D est nul
Dans ce cas $\omega_2 = G^r\beta_r + \ldots + \beta_0$. L'équation $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ implique $\omega \wedge \beta_r = 0$. Si γ_2 est non nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\gamma_2 \wedge \beta_r = 0$. La forme ω est un multiple de γ_2 et on a ainsi une suite pour ω. Si γ_2 est nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $d\beta_r + r\beta_r \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \beta_r$. En remplaçant β_r par $F\omega$ dans cette expression on obtient une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 : $d\omega = \omega \wedge \left(\frac{dF}{2F} - \frac{r\gamma_1}{2}\right)$. $\square$

Preuve du théorème 1.6. – Soit H une intégrale première de ω dans un corps K, extension de type riccati de M. Il existe une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 pour ω sur K. En utilisant le lemme 3.3, par récurrence, nous obtenons une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur M. Inversement, à partir d'une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur M $\omega, \omega_1, \omega_2$, on construit une intégrale première de ω en résolvant $dG = \frac{G^2}{2}\omega_2 + G\omega_1 + \omega$ puis $dF = F(\omega_1 + \frac{2}{G}\omega)$ et $dH = F\omega$.

$\square$

Références bibliographiques

[1] C.Godbillon et J.Vey - *Un invariant des feuilletages de codimension un,* Comptes rendus Acad. Sc. Paris **273** pp 92-95 (1971)
[2] M. Singer - *Liouvillian first integral of differential equations,* Trans. A. M. S. **333** pp 673-688 (1992)
[3] F.Touzet - *Equation différentielles admettant des solutions liouvilliennes,* thèse de l'université de Rennes I (1995)