

Thèse

présentée en vue de l'obtention du
Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse
Spécialité : Mathématiques Pures

par
Guy CASALE

SUR LE GROUPOÏDE DE GALOIS D'UN FEUILLETAGE

Soutenue le 9 Juillet 2004 devant le jury composé de :

J.M Aroca	Professeur, Université de Valladolid	Rapporteur
M. Berthier	Professeur, Université de La Rochelle	Rapporteur
B. Malgrange	Professeur, Institut Fourier, Grenoble	Rapporteur
M. Nicolau	Professeur, Université autonome de Barcelone	Examineur
E. Paul	Maître de conférence, Université de Toulouse III	Directeur
J.P. Ramis	Professeur, Université de Toulouse III	Directeur

Laboratoire Emile Picard, UMR 5580, UFR MIG, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France.

à Annie

Je tiens à remercier vivement Emmanuel Paul pour ses conseils, ses questions, sa disponibilité dont j'ai usé et abusé. Si ces trois années ont été si agréables, je le dois aux qualités humaines dont il a su faire preuve.

Jean-Pierre Ramis m'a proposé de travailler sur le groupoïde de Galois lorsque j'étais en DEA. Son enthousiasme et sa vision à long terme sont à l'origine de mon travail présent et futur. Je l'en remercie.

Cette thèse s'inscrit dans la lignée des travaux de Bernard Malgrange en théorie de Galois non-linéaire. Outre les mathématiques, qui sont en grande partie issues de ses travaux, cette thèse doit beaucoup à ses encouragements. Je suis très honoré qu'il ait accepté de rapporter ce travail.

Lors de mon séjour à La Rochelle, j'ai pu profiter de nombreuses discussions avec Michel Berthier. Je suis très heureux qu'il ait accepté d'être rapporteur.

José-Manuel Aroca s'est intéressé dès le début à mon travail. C'est avec plaisir que je le remercie d'avoir écrit un rapport.

Par deux fois Marcel Nicolau m'a accueilli à Barcelone pour discuter de mes travaux. Je le remercie de faire parti du jury.

Parmi toutes les personnes qui se sont intéressées à mes travaux, j'aimerais particulièrement remercier Franck Loray. Ses remarques sur certains calculs résurgents ou sur les suites de Godbillon-Vey sont à l'origine d'une partie de ce travail.

Pendant ma thèse, j'ai eu la chance d'être invité dans différentes Universités et colloques. La gentillesse de mes hôtes a toujours rendu ses séjours agréables.

J'ai passé une grande partie de ces neuf dernières années dans cette Université. Beaucoup de personnes m'y ont appris des mathématiques parmi celles-ci je tiens à remercier T. Fiedler, S. Orevkov et P. Eyssidieux. D'autres personnes m'ont accompagné dans cet apprentissage (et à côté) Fred, Sonia, ..., Manu, Juju, ...

L’ambiance de ces trois dernières années doit beaucoup à l’envie de comprendre de belles mathématiques au sein du GDTE, au foot des thésards, aux escapades pyrénéennes et à quelques bars toulousains. Camarades Thésards et anciens Thésards, Merci.

D’autres personnes m’ont accompagné pendant cette thèse et depuis beaucoup plus longtemps. Je pense à ma famille, aux vieux amis et aux moins vieux. Je pense à Bélinda ¹. . . Je sais qu’ils m’accompagneront encore longtemps.

Une soutenance appelant un départ, je lègue ² ma part du frigo à Guillaume, mes dettes à Juju, mon mur de carte postale au Bureau 31, mon ballon de foot à Mathieu & Nico, mon bureau au prochain thésard-feuilleteur et tous mes stylos à Manu.

¹Merci Opa & Guillaume

²Soumis à condition JSPS

Introduction

Un bref survol du contexte

Les objets étudiés dans cette thèse sont des systèmes différentiels particuliers. Dans la situation locale qui est la nôtre, un système différentiel sera un idéal différentiel engendré par des équations aux dérivées partielles ayant n variables indépendantes et m variables dépendantes polynomiales en les dérivées. Les systèmes d'équations aux dérivées partielles sont étudiés depuis longtemps. Nous nous intéresserons aux deux points de vue suivants. Premièrement celui d'E. Cartan qui donne des conditions de régularité nécessaires à l'existence de suffisamment de solutions formelles, appelées conditions d'involutivité. Le second est celui de J.F. Ritt qui étudie ces systèmes d'un point de vue algébrique. En utilisant le premier point de vue, B. Malgrange transporte les résultats précédents d'un cadre algébrique dans un cadre analytique. Nous rappellerons la définition de systèmes involutifs mais nous ne l'emploierons jamais directement. Nous utiliserons essentiellement les théorèmes d'involutivité générique, de Cartan-Kähler, et de "noetherianité" de Malgrange-Ritt-Radenbush. Pour les preuves nous renvoyons à [Ma7] et à [Ri2]. Le théorème d'involutivité générique assure qu'en dehors d'une hypersurface de "conditions initiales" un système d'équations aux dérivées partielles a les mêmes solutions formelles qu'un système involutif. Le théorème de Cartan-Kähler dit que pour un système involutif, tout jet d'ordre k solution des équations peut être prolongé en une solution formelle du système. Enfin le théorème de Malgrange-Ritt-Radenbush affirme que toute suite croissante d'idéaux différentiels réduits est stationnaire.

Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie ont été introduit par B. Malgrange dans "*Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*" ([Ma5]). Ce sont des systèmes différentiels réduits particuliers portant sur les applications d'un polydisque dans lui-même satisfaisant certaines inclusions (définitions 1.2.1 et 1.2.2). Ces inclusions assurent que l'ensemble des solutions formelles du système est stable par composition tant que leurs sources et leurs buts restent en dehors d'une hypersurface analytique, qu'il est stable par inversion, et que de plus l'application identité est solution de ce système. Sous des hypothèses de régularité (involutivité du système différentiel le définissant), l'étude de ces objets remonte à S. Lie [Lie] et E. Cartan [Ca1]. Le fait de s'autoriser des singularités dans les équations définissant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie permet de considérer des situations naturelles ne remplissant pas les conditions de régularité. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde

de Lie d'invariance d'une fonction méromorphe est l'exemple typique de "groupe infini de transformations" (ou $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie). Pourtant, au voisinage du lieu d'indétermination, ce n'en est pas un au sens de Lie-Cartan. Les exemples les plus simples d'un tel objet sont d'une part l'action effective d'un groupe algébrique G sur un espace homogène G/H où H est un sous-groupe algébrique linéaire de G , et d'autre part le "groupe infini" des transformations qui préservent le volume. A chaque $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie on peut associer une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie donnée par un système différentiel linéaire dont les solutions seront les générateurs infinitésimaux du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Dans le premier exemple, les générateurs infinitésimaux correspondent à la projection de l'algèbre de Lie des champs invariants à droite sur G/H et dans le deuxième exemple aux champs de divergence nulle.

Le groupeïde de Galois d'un feuilletage est défini par B. Malgrange ([Ma5]) comme étant le plus petit $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie ayant la propriété suivante : tout champ de vecteurs tangent au feuilletage est solution de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. Cette définition est un cas particulier de la notion de $\mathcal{D}$ -enveloppe d'un système dynamique. Celle-ci est le plus petit $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie tel que les transformations (resp. transformations infinitésimales) du système dynamique soient solutions de ce $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie (resp. solutions de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie). Cette définition repose sur la non-existence d'un "troisième théorème de Lie" pour les $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie (nous verrons d'autres illustrations de ce fait dans le premier chapitre). Un feuilletage singulier est un cas particulier de $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. Le système d'équations aux dérivées partielles la définissant est un système d'équations linéaires d'ordre 0 satisfaisant aux conditions de Frobenius. Cette $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie n'est généralement pas intégrable dans le sens où elle n'est pas la $\mathcal{D}$ -algèbre d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. En codimension un nous montrerons que les feuilletages intégrables en ce sens sont exactement ceux qui admettent une intégrale première méromorphe.

Un majorant naturel du groupeïde de Galois d'un feuilletage $\mathcal{F}$ (donné par des formes $\omega_1, \dots, \omega_q$) est le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie des automorphismes du feuilletage défini par les équations

$$\Gamma^* \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = 0.$$

Ce majorant est très "grossier". B. Malgrange montre dans [Ma5] et [Ma6] comment la considération de structures géométriques transverses permet de trouver des majorants plus fins en considérant les $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie d'invariance de ces structures. En particulier la connaissance de symétries de Lie du feuilletage données par une algèbre de Lie de champs de vecteurs méromorphes laissant invariant le feuilletage ($L_X \omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_n = 0$) permet de trouver un majorant du groupeïde de Galois. En considérant outre les équations définissant les automorphisme, les équations $\Gamma^* X = X$. On obtient des équations d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. On vérifie sans peine que les champs de vecteurs tangents au feuilletage vérifient ces équations au niveau infinitésimal.

Un autre point de vue développé dans [Dr1], [Dr2], [Ves1] et [Ves2] consiste à étudier le système différentiel sur les applications du polydisque dans $\mathbb{C}^q$ définissant les systèmes fondamentaux d'intégrales premières. Dans ces références J. Drach et E.

Vessiot étudient plus particulièrement les systèmes d'équations maximaux admettant des solutions et en décrivent certains, plus intéressants que les autres, appelés automorphes. Ces systèmes permettent eux-aussi de trouver des majorants du groupe de Galois en considérant les transformations du polydisque laissant invariants ces systèmes. Les preuves de l'existence de systèmes automorphes ne sont pas claires et semblent même incomplètes.

L'avantage de ce dernier point de vue est de permettre une approche de l'étude du groupe de Galois d'un feuilletage à travers ses intégrales premières. Les exemples présentés avec beaucoup de détails dans [Dr2] sont des cas particuliers de feuilletages admettant une intégrale première dans une extension fortement normale du corps des fonctions méromorphes sur le polydisque. Les extensions fortement normales ont été introduites par E. Kolchin (voir [Ko] [Kov] et [Bu1]) afin de développer dans un point de vue "extension de corps" la théorie de Picard-Vessiot pour les équations différentielles linéaires. Une extension fortement normale est algébriquement engendrée par un nombre fini d'éléments et vérifie l'hypothèse de normalité suivante : à automorphisme de l'extension près et à extension du corps des constantes près, il n'y a qu'une seule manière de plonger cette extension dans une autre. Pour ces extensions, E. Kolchin montre que le groupe des automorphismes différentiels est un groupe algébrique. Dans les exemples de [Dr2] ce groupe est exactement celui présenté comme groupe de rationalité du feuilletage.

Les principales questions abordées

Dans ce travail, nous chercherons à donner une caractérisation des systèmes dynamiques dont la $\mathcal{D}$ -enveloppe a une certaine propriété de finitude. Cette propriété peut être présentée de la manière suivante : le quotient de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de la $\mathcal{D}$ -enveloppe par l'algèbre de Lie des transformations infinitésimales du système dynamique est de dimension finie. Plus précisément nous répondrons à cette question pour

- le système dynamique défini par un difféomorphisme $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ (chapitre 2),
- le système dynamique défini par une application rationnelle $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (chapitre 3),
- les feuilletages holomorphes singuliers de codimension un dans un premier temps (chapitre 4),
- les feuilletages correspondants à quelques équations différentielles classiques : singularité réduite, équations de Riccati et de Weierstrass, équations différentielles linéaires, systèmes Hamiltoniens complètement intégrables (chapitre 5),
- puis ceux de codimension quelconque sous une hypothèse de transitivité (chapitre 6),

Dans le premier cas cette caractérisation se fera en terme d'invariants de la classe de conjugaison analytique du difféomorphisme. Dans le deuxième cas nous

obtiendrons une liste complète des applications possibles avec les équations explicites de leur $\mathcal{D}$ -enveloppes. La caractérisation des feuilletages se fera en terme de suites de Godbillon-Vey.

Un deuxième type de questions que nous aborderons concerne les intégrales premières des feuilletages. Nous chercherons à répondre à la question suivante :

Le groupoïde de Galois d'un feuilletage permet-il de construire une intégrale première du feuilletage d'un type de transcendance particulier ?

Nous examinerons cette question pour les feuilletages de codimension un. Cette étude nous indiquera comment y répondre pour les feuilletages de codimension quelconque.

Présentation des résultats

Dans le premier chapitre nous ferons les rappels nécessaires à la compréhension de ce travail. Nous omettrons presque toujours les preuves des résultats que nous rappellerons et renverrons le lecteur à [Ma7] et [Ma5].

Le seul résultat nouveau de ce chapitre se trouve dans la troisième partie. Nous cherchons un moyen de présenter le système différentiel décrivant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sous une forme simplifiée. Nous ne trouvons de forme simplifiée que pour les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie n'ayant pas d'équations d'ordre zéro. Ces $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie sont dit transitifs. Pour les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie transitifs non-singuliers, c'est-à-dire donnés par un système différentiel où le théorème de Cartan-Kähler et la stabilité par composition s'appliquent partout, un résultat classique (voir [Kob]) donne l'existence d'une structure géométrique invariante (en fait une G -structure). Cette dernière est peut-être à rapprocher des équations de structures de Cartan pour les "groupes infinis" [Ca1, Ca2]. Grâce aux théorèmes de B. Malgrange, la construction classique fournit une structure géométrique invariante pour les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie généraux mais seulement en dehors d'une hypersurface. Le point délicat est de prouver que cette structure géométrique se prolonge méromorphiquement à cette hypersurface. Nous le montrerons par des arguments d'algèbre linéaire. Nous obtiendrons :

Théorème (1.3.2) *Tout $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif au-dessus d'un polydisque est le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie d'invariance d'une structure géométrique méromorphe sur ce polydisque.*

Dans le chapitre 2, nous étudierons en détail les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un disque Δ de $\mathbb{C}$. Un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est alors donné par une équation différentielle ordinaire et sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie par une équation différentielle linéaire sur $T\Delta$. Dans le cas d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie donné par une équation non singulière, S. Lie ([Lie, Ca2]) donne la liste de ces objets. Ce sont dans une bonne coordonnée le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie des homographies (défini par $2\frac{\varphi'''}{\varphi'} - 3\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = 0$), le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie des transformations affines (défini par $\frac{\varphi''}{\varphi'} = 0$) ou un $\mathcal{D}$ -groupoïde

de Lie des transformations euclidiennes $((\varphi')^k = 1)$. Ici nous nous intéressons à la forme des équations des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie singuliers. Nous obtiendrons le résultat suivant annoncé par B. Malgrange dans ses notes [Ma4].

Théorème (2.1.4) *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie au-dessus de Δ . Il est différentiablement engendré par une seule équation méromorphe d'ordre inférieur ou égal à trois d'une des cinq formes suivantes :*

(rang 0) $h(y) - h(x) = 0$ avec h méromorphe,

(rang 1) $\eta(y)(y_1)^n - \eta(x) = 0$ avec n un entier et η méromorphe,

(rang 2) $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$ avec μ méromorphe,

(rang 3) $\nu(y)(y_1)^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0$ avec ν méromorphe,

(rang ∞) $0 = 0$.

La preuve de ce théorème nécessite l'intégration des $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie définies sur Δ (proposition 2.1.1). Bien qu'il n'existe pas de "troisième théorème de Lie singulier", l'intégration se fait sans problème sauf dans le cas des $\mathcal{D}$ -algèbres de rang un. L'intégrabilité des $\mathcal{D}$ -algèbres de rang un dépend de la régularité de son équation et dans les bons cas le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie intégrant n'est pas unique. La détermination des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de rang nul est une application du théorème de préparation de Weierstrass.

Nous nous intéresserons ensuite aux solutions de ces $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie. Ici encore apparait une différence essentielle avec le cas non singulier. Dans ce cas tout germe $f : (\Delta, 0) \rightarrow (\Delta, 0)$ solution d'une des équations ci-dessus est analytiquement linéarisable. Les résultats que nous obtenons montrent que le fait de s'autoriser des singularités dans les équations enrichit la nature des solutions tout en les contrôlant.

Théorème (2.2.1) ([Ma4]) *Le difféomorphisme f formellement linéarisable est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de rang fini si et seulement si f est analytiquement linéarisable.*

La classe de conjugaison analytique d'un germe de difféomorphisme tangent à l'identité est caractérisée par son espace d'orbite, c'est-à-dire le quotient d'un germe de disque par ce difféomorphisme. Suivant la description faite par J. Martinet et J.P. Ramis ([M-R2] voir aussi [Ra]), cet espace est constitué d'un chapelet de k sphères $(\mathbb{S}_i)_{i \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}}$ recollées de la manière suivante :

- $\mathbb{S}_{2i-1}$ est recollée avec $\mathbb{S}_{2i}$ par un germe de difféomorphisme $\varphi_{2i-1,2i} : (\mathbb{S}_{2i-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{S}_{2i}, 0)$,
- $\mathbb{S}_{2i}$ est recollée avec $\mathbb{S}_{2i+1}$ par un germe de difféomorphisme $\varphi_{2i,2i+1} : (\mathbb{S}_{2i}, \infty) \rightarrow (\mathbb{S}_{2i+1}, \infty)$.

Théorème (2.2.4)

1. *Un difféomorphisme tangent à l'identité est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 3 si et seulement si il existe un entier positif p tel que les invariants*

géométriques soient de la forme $\frac{\tau}{\sqrt[p]{1+a_i\tau^p}}$ en 0 et $\tau\sqrt[p]{1+\frac{b_i}{\tau^p}}$ en ∞ . De tels difféomorphismes seront appelés, d'après J. Écalle, binaires.

2. Un difféomorphisme tangent à l'identité est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 2 si et seulement si il existe un entier p tel que les invariants géométriques soient ou bien de la forme $\frac{\tau}{\sqrt[p]{1+a_i\tau^p}}$ en 0 et τ en ∞ ou bien de la forme τ en 0 et $\tau\sqrt[p]{1+\frac{b_i}{\tau^p}}$ en ∞ . De tels difféomorphismes seront appelés unitaires.

Dans le paragraphe 2.3 on utilisera les résultats de classification analytique des germes de difféomorphismes tangents à l'identité pour établir une classification des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie. Après une classification formelle, conséquence directe de l'étude des solutions formelles des $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie, nous montrerons (corollaire 2.3.5) qu'à un revêtement double près, tout $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admet une solution convergente en 0. Nous suivrons alors la démarche exposée dans [M-R2]. La détermination de la classe de conjugaison analytique de la solution convergente en 0 donne la classification analytique des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie.

Nous calculerons ensuite les équations d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont la solution convergente en 0 a une classe analytique donnée. Ces calculs sont fait par J. Écalle ([Ec]) dans le cas de difféomorphismes formellement conjugués à $\frac{x}{1-x}$. Nous donnerons les calculs pour les difféomorphismes "unitaires de résidu nul".

Dans le troisième chapitre nous étudierons la $\mathcal{D}$ -enveloppe d'une application rationnelle de $\mathbb{P}^1$. Le fait qu'une application rationnelle soit solution d'une équation du type de celles données par le théorème 2.1.4 permet d'étudier le revêtement du complémentaire de l'ensemble exceptionnel donné par la linéarisante de Kœnigs. Nous obtenons alors la liste suivante.

Théorème (3.1.3) *Les seules applications rationnelles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ ayant une $\mathcal{D}$ -enveloppe non triviale sont, à conjugaison par une homographie près, les monômes, les polynômes de Tchébitchev et les exemples de Lattès.*

Dans le quatrième chapitre, nous commencerons l'étude du groupoïde de Galois d'un feuilletage en traitant le cas des feuilletages de codimension un. Le lemme 1.4.4 associé au théorème 2.1.4 nous donnera la forme des équations du groupoïde de Galois. Dans une première partie, nous discuterons suivant le rang transverse du groupoïde de Galois l'existence d'une structure méromorphe transverse euclidienne (rang transverse égal à un), affine (rang transverse égal à deux) ou projective (rang transverse égal à trois). Nous énoncerons le résultat en terme de suites de Godbillon-Vey méromorphes pour le feuilletage, associées aux structures transverses.

Théorème (4.1.2) *Un feuilletage $\mathcal{F}$ admet une suite de Godbillon-Vey de longueur ℓ avec $\ell \leq 3$ si et seulement si son groupoïde de Galois est contenu dans un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang transverse ℓ .*

Ce résultat a été annoncé dans [Ma6] où B. Malgrange prouve une des deux implications d’une manière plus géométrique mais essentiellement analogue à la nôtre. La preuve que nous donnerons de l’autre implication semble être différente. En particulier elle met en avant la construction d’une intégrale première particulière du feuilletage. L’étude plus précise de cette intégrale première occupera les sections 4.2 et 4.4.

Afin d’interpréter le rang transverse du groupoïde de Galois en terme de type de transcendance d’intégrales premières du feuilletage, nous définirons un nouveau type d’extension de corps différentiel. Outre les extensions de type Darboux et les extensions Liouvilliennes déjà connues, nous définirons les extensions de type Riccati. Elles sont composées d’une suite d’extensions qui sont soit algébriques soit engendrées par un élément G vérifiant un système d’équations aux dérivées partielles $dG = \frac{G^2}{2}\omega_2 + G\omega_1 + \omega_0$ (definition 4.2.1). Nous discuterons des différents types de transcendance d’intégrales premières du feuilletage caractérisés par le groupoïde de Galois. Nous obtiendrons le théorème suivant :

Théorème (4.2.2) *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage de codimension un de $(\mathbb{C}^n, 0)$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ admet une intégrale première méromorphe (resp. de type Darboux, Liouville ou Riccati) si et seulement si $\mathcal{F}$ admet un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse 0 (resp. 1, 2 ou 3).*

Le cas des feuilletages dont le groupoïde de Galois est de rang transverse nul se traite d’une manière particulière. Nous construirons un quotient de l’espace des feuilles naturellement muni d’une structure de courbe analytique. Cette construction prendra l’essentiel du paragraphe 4.2. Le cas des feuilletages dont le groupoïde de Galois est de rang transverse non nul provient de l’extension suivante d’un théorème de M. Singer :

Théorème (4.2.6) *Un germe de feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ de codimension un admet une intégrale première de type Darboux (resp. Liouville ou Riccati) si et seulement s’il admet une suite de Godbillon-Vey de longueur un (resp. deux ou trois).*

La preuve de ce théorème que nous proposons dans le paragraphe 4.3 est basée sur l’interprétation d’une suite de Godbillon-Vey comme conditions d’intégrabilité d’un système d’équations aux dérivées partielles suivant un principe dû à J. Martinet. La suite de la preuve consiste à récupérer une suite “moins transcendante” à partir d’une suite dans un type d’extension donné et de réitérer. La nature des arguments est essentiellement celle des arguments donnés par F. Touzet et J.P. Rolin pour prouver le théorème de Singer [Tou1]. Nous les étendons au cas Riccati.

Dans la section 4.4 nous décrirons quelques-unes des relations existantes entre le groupoïde de Galois d’un feuilletage $\mathcal{F}$ et la notion d’extension fortement normale de E. R. Kolchin ([Ko]). Pour cela nous introduisons l’anneau différentiel $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ défini comme le quotient de l’anneau différentiel engendré par une indéterminée H sur

$\mathcal{M}_\Delta$ par l'idéal différentiel engendré par l'équation qui dit que H est une intégrale première de $\mathcal{F}$.

Théorème (4.4.4) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de codimension un de $(\mathbb{C}^n, 0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est de rang transverse fini ;*
- (2) *l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ contient des idéaux différentiels non triviaux ;*
- (3) *il existe une intégrale première de $\mathcal{F}$ dans une extension fortement normale $\mathcal{K}$ de $\mathcal{M}_\Delta$.*

Les implications (3) $\Rightarrow$ (2) et (2) $\Rightarrow$ (1) sont des conséquences de lemmes généraux que nous retrouverons au chapitre cinq. Nous prouvons l'implication (1) $\Rightarrow$ (3) en vérifiant que les intégrales premières construites dans la partie précédente sont naturellement des éléments d'une extension fortement normale du corps des fonctions méromorphes. Cette étape repose entièrement sur la forme particulière des équations des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un disque que nous avons obtenues dans le deuxième chapitre.

Dans le cinquième chapitre, nous donnerons quelques exemples de groupoïdes de Galois de feuilletages classiques. Nous appliquerons les résultats du chapitre 4 et ceux sur les solutions d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sur un disque, à l'étude d'un germe de feuilletage de $\mathbb{C}^2$ à singularité réduite. Ces feuilletages étant complètement décrits par leur holonomie, nous utiliserons de manière essentielle le théorème 2.2.4. Nous expliquerons comment ces résultats redonnent la caractérisation, en terme d'invariants analytiques, des germes de feuilletages de $(\mathbb{C}^2, 0)$ à singularités réduites admettant une structure transverse méromorphe, affine ou projective. Nous retrouvons ainsi de manière "galoisienne" les résultats de M. Berthier et F. Touzet [B-T] et ceux de F. Touzet [Tou2]. Nous déterminerons ensuite les groupoïdes de Galois des feuilletages donnés par les équations de Weierstrass et Riccati.

Dans le cas d'un feuilletage donné par une équation différentielle linéaire, B. Malgrange prouve dans [Ma5] que le comportement transverse du groupoïde de Galois redonne le groupe de Galois différentiel :

Théorème (5.3.1) *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage donné par un système d'équations différentielles linéaires redonne sur une transverse le groupe de Galois différentiel du système d'équations.*

Sa preuve utilise le point de vue Tannakien du groupe de Galois différentiel. Nous prouverons ce résultat en utilisant la description de Picard-Vessiot du groupe de Galois. L'idéal maximal intervenant dans la construction de l'extension de Picard-Vessiot sera interprété comme un idéal équations sur les intégrales premières d'un feuilletage suivant J. Drach. En utilisant les résultats de la dernière partie du chapitre précédent, nous construirons un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible à partir de cet idéal

dont le comportement transverse est celui du groupe de Galois. Nous prouverons dans un second temps que celui-ci est le groupoïde de Galois du feuilletage.

La fin de ce chapitre sera consacrée à la détermination de la $\mathcal{D}$ -enveloppe d'un champ symplectique complètement intégrable ainsi qu'à l'étude du groupoïde de Galois d'un feuilletage donné par un champ Hamiltonien complètement intégrable. Nous obtiendrons le résultat suivant :

Théorème (5.4.2)

1. Soit X un champ symplectique complètement intégrable. La $\mathcal{D}$ -enveloppe de X a une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie abélienne.
2. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage donné par un champ de vecteurs Hamiltonien complètement intégrable. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse associé au groupoïde de Galois a une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie abélienne.

Dans le sixième chapitre, nous aborderons l'étude des feuilletages de codimension quelconque. Dans une première partie nous allons chercher le système différentiel qui remplacera la dérivée Schwartzienne. Remarquons que dans le cas des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un disque la dérivée Schwartzienne apparaît naturellement dans l'équation satisfaite par l'application conjuguant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang trois avec le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie des homographies. Nous construirons pour un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif de rang fini un système différentiel sur les applications à valeurs dans un espace homogène approprié. Les applications solutions de ce système conjuguent le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie à l'action d'un groupe. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif de rang fini, H le groupe d'isotropie d'un point p , $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ les algèbres de Lie de champs de vecteurs en p correspondantes. Sous l'hypothèse

$$\left| \begin{array}{l} \text{HYPOTHESE } (\mathcal{H}) \\ \text{Il existe un groupe algébrique } G \text{ ayant pour algèbre de Lie } \mathfrak{g} \text{ et admettant} \\ \text{un sous-groupe fermé isomorphe à } H \text{ intégrant } \mathfrak{h} \text{ pour l'inclusion naturelle} \\ \text{de } \mathfrak{h} \text{ dans } \mathfrak{g}. \end{array} \right|$$

et en notant $\underline{s}$ et s les sections des structures géométriques définissant l'action de G sur G/H et de $\mathcal{G}$, on a la proposition (de type Darboux-Cartan) suivante :

Proposition (6.1.1) *Le système d'équations aux dérivées partielles $F^*\underline{s} = s$ est formellement intégrable. Soient F_1 et F_2 deux solutions du système d'équations $F^*\underline{s} = s$ de source en dehors de l'ensemble analytique de non-stabilité par composition de $\mathcal{G}$. Alors*

1. si elles ont même source, il existe g un élément de G vérifiant $F_1 = gF_2$,
2. si elles ont même but, il existe φ une solution formelle de $\mathcal{G}$ vérifiant $F_1 = F_2 \circ \varphi$.

Nous considérerons ensuite un feuilletage admettant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible transitif, de rang transverse fini. Nous utiliserons la version du théorème

de Darboux-Cartan ci-dessus pour construire des intégrales premières locales du feuilletage “peu transcendantes”. Ce seront les applications qui semi-conjuguent le groupoïde de Galois du feuilletage à G .

Soit $\mathfrak{g}$ l’algèbre de Lie de champs de vecteurs du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse associé au groupoïde de Galois. Elle a une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ formée des champs transverses s’annulant en x qui est intégrable par le groupe H des transformations transverses d’isotropie de x .

Sous l’hypothèse $\mathcal{H}_1$, on construit comme précédemment un espace homogène G/H , modèle local pour le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse du groupoïde de Galois.

L’action de G est décrite par une section $\underline{s}$ d’un fibré et l’action du groupoïde de Galois par une section s .

Théorème (6.2.1) *Sous l’hypothèse $\mathcal{H}$, il existe une section $\underline{s}$ définissant G sur G/H telle que le système d’équations aux dérivées partielles $H^*\underline{s} = s$ dans $J^*(\Delta \rightarrow G/H)$ soit formellement intégrable en dehors de l’ensemble analytique Z de non-involutivité des équations définissant le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible. Le groupoïde d’invariance à la source de ce système est le groupoïde de Galois et le groupoïde d’invariance au but est G .*

Dans une formulation plus algébrique, le théorème ci-dessus devient :

Théorème (6.2.2) *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage admettant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible transitif de rang transverse fini, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie en un point x régulier pour le groupoïde et H le groupe algébrique d’isotropie de x . Si $\mathfrak{g}$ et H vérifient l’hypothèse $\mathcal{H}$ avec G algébrique alors $\mathcal{F}$ admet un système complet d’intégrales premières dans une extension fortement normale de $\mathcal{M}_\Delta$ de groupe de Galois G .*

Ce théorème est l’extension aux feuilletages de codimension quelconque du théorème 4.4.4. La preuve suit exactement le même procédé. La difficulté initiale de ce théorème était de construire les intégrales premières. Le théorème 6.1.1 permet de recopier les méthodes de construction utilisées pour la codimension un dans le cadre d’une codimension quelconque.

Table des matières

Introduction	i
Un bref survol du contexte	i
Les principales questions abordées	iii
Présentation des résultats	iv
1 Définitions et premières propriétés	1
1.1 Systèmes différentiels	1
1.2 $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie	4
1.3 Structures géométriques	9
1.4 Le groupeïde de Galois d'un feuilletage	12
2 $\mathcal{D}$-groupeïdes de Lie au-dessus d'un germe de disque de $\mathbb{C}$	15
2.1 Liste des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie	15
2.2 $\mathcal{D}$ -enveloppe d'un germe de difféomorphisme	21
2.3 Classe de conjugaison analytique d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie	27
2.4 Un calcul explicite de la $\mathcal{D}$ -enveloppe d'un difféomorphisme	32
3 La $\mathcal{D}$-enveloppe d'une application rationnelle	37
3.1 Structure différentielle et algébrique sur $J^*(\mathbb{P}^1)$	37
3.2 Preuve du théorème 3.1.3	40
4 Feuilletages de codimension un	43
4.1 Groupeïdes de Galois et Suites de Godbillon-Vey	43
4.2 Groupeïdes de Galois et intégrales premières	52
4.3 Un théorème de Singer et ses généralisations	56
4.4 Groupeïdes de Galois et extensions fortement normales	61
5 Groupeïdes de Galois de feuilletages classiques	69
5.1 Le groupeïde de Galois d'un germe de feuilletage de $(\mathbb{C}^2, 0)$ à singularité réduite	69
5.2 Le groupeïde de Galois d'équations du premier ordre	73
5.3 Le groupeïde de Galois d'une équation différentielle linéaire	75
5.4 Le groupeïde de Galois d'un feuilletage Hamiltonien complètement intégrable	79

6 Feuilletages de codimension quelconque	83
6.1 Forme locale d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie transitif de rang fini	83
6.2 Groupeïde de Galois et intégrales premières ; le cas transitif de rang transverse fini	85
Bibliographie	89

Chapitre 1

Définitions et premières propriétés

1.1 Systèmes différentiels

Soient $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^m$ deux polydisques. Nous noterons $J_k(U \rightarrow V)$ le fibré sur U des jets d'ordre k d'applications de U dans V . Le choix de coordonnées locales x_i sur U et z_j sur V donne des coordonnées naturelles sur $J_k(U \rightarrow V)$: $(x_i, z_j, z_j^{\epsilon_i}, \dots, z_j^{\alpha})$ où α désigne un multi-indice de $\mathbb{N}^m$ tel que $|\alpha| \leq k$ et ϵ_i est le multi-indice de poids 1 dont la seule coordonnée non nulle est la j -ième. Nous considérons l'espace $J_k(U \rightarrow V)$ muni du faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{U \times V}[z_j^{\epsilon_i}, \dots, z_j^{\alpha}]$ que nous noterons $\mathcal{O}_{J_k(U \rightarrow V)}$. Cet anneau est l'anneau des équations aux dérivées partielles sur les applications de U dans V . Ces espaces sont fibrés sur U et munis de projections $\pi_k^{k+q} : J_{k+q} \rightarrow J_k$ correspondant aux inclusions $(\pi_k^{k+q})^* : \mathcal{O}_{J_k(U \rightarrow V)} \rightarrow \mathcal{O}_{J_{k+q}(U \rightarrow V)}$ des équations d'ordre k dans l'anneau des équations d'ordre $k+q$. Nous noterons $J_k^*(U \rightarrow V)$ l'ouvert des jets d'applications submersives de U dans V muni du faisceau d'anneaux restreint. Les anneaux $\mathcal{O}_{J_k}$ sont munis de dérivations partielles :

$$\begin{array}{ccc} D_i : \mathcal{O}_{J_k(U \rightarrow V)} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{J_{k+1}(U \rightarrow V)} \\ E & \mapsto & \frac{\partial E}{\partial x_i} + \sum_j \frac{\partial E}{\partial z_j} z_j^{\epsilon_i} + \dots + \frac{\partial E}{\partial z_j^{\alpha}} z_j^{\alpha + \epsilon_i} \end{array}$$

permettant de construire une connexion $D : \mathcal{O}_{J_k} \rightarrow \Omega_M^1 \otimes \mathcal{O}_{J_{k+1}}$ par $\sum dx_i \otimes D_i$.

Définitions 1.1.1

1. Soit u une application de U dans V . On appelle prolongement d'ordre k de u la section $u^{(k)} : U \rightarrow J_k(U \rightarrow V)$ donnée en coordonnées locales par $(x, u(x), \dots, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha})$. Elle vérifie $\pi_k^{k+q} \circ u^{(k+q)} = u^{(k)}$.
2. Soit Φ une transformation locale de $U \times V$ fibrée au-dessus de ϕ une transformation locale de U . Cette transformation agit sur les graphes d'applications de U dans V en préservant l'ordre de contact. On appelle prolongement d'ordre k de Φ , la transformation $\Phi^{(k)}$ ainsi définie sur $J_k(U \rightarrow V)$. Elle vérifie $(\Phi \circ \Psi)^{(k)} = \Phi^{(k)} \circ \Psi^{(k)}$ et $\pi_k^{k+q} \circ \Phi^{(k+q)} = \Phi^{(k)} \circ \pi_k^{k+q}$.

3. Soit X un champ de vecteurs sur $U \times V$ fibré au-dessus d'un champ v sur U . Le prolongement d'ordre k du flot de X définit un groupe local à un paramètre de transformations de $J_k(U \rightarrow V)$. Le générateur infinitésimal de ce groupe est noté $X^{(k)}$, c'est le prolongement d'ordre k de X . Il vérifie $(\pi_k^{k+q})^* X^{(k+q)} = X^{(k)}$ ainsi que $[X^{(k)}, Y^{(k)}] = [X, Y]^{(k)}$.
4. Soit $\mathcal{I}_k$ un idéal de $\mathcal{O}_{J_k(U \rightarrow V)}$. On appelle prolongement d'ordre q de $\mathcal{I}_k$, l'idéal $\text{pr}_q \mathcal{I}_k$ de $\mathcal{O}_{J_{k+q}(U \rightarrow V)}$ engendré par $D^\beta f$ pour f dans $\mathcal{I}$ et $|\beta| \leq q$.

Remarque 1.1.2 Les actions des prolongements d'ordre k des transformations et des champs de vecteurs s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur ou égal à k des différentes composantes de la transformation ou du champ de vecteurs initial. Pour les preuves des propriétés des prolongements ainsi que pour des calculs explicites mais lourds de ces prolongements, nous renvoyons le lecteur aux livres de P.J.Olver [Ol], J.F.Pommaret [Po].

Nous noterons $J(U \rightarrow V)$ la limite projective du système $\pi_k^{k+q} : J_{k+q} \rightarrow J_k$ et $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}$ la limite inductive des anneaux correspondants, c'est-à-dire le faisceau d'anneaux des équations d'ordre non fixé. Ces anneaux sont munis des dérivations partielles D_i et de la connexion $D : \mathcal{O}_J \rightarrow \Omega_U^1 \otimes \mathcal{O}_J$ définies par les formules précédentes. Un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}$ est dit différentiel si il est stable par les dérivations partielles. Un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}$ est dit cohérent si les faisceaux $\mathcal{I}_k$ des équations d'ordre k sont cohérents. Nous appellerons un tel faisceau cohérent d'idéaux différentiel un système différentiel sur les applications de U dans V .

Une solution de $\mathcal{I}$ en $p \in U$ est un morphisme de $\mathcal{O}_U$ -algèbre u de $\mathcal{O}_{J^*(U \rightarrow V)}/\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}_{U,p}^m$, tel que $u_\ell(D_i E) = \frac{\partial}{\partial x_i} u_\ell(E)$. En regardant $f = u(z)$, on obtient un germe $f : (U, p) \rightarrow (V, q)$ satisfaisant les équations différentielles de l'idéal $\mathcal{I}$. On définit de même les solutions formelles comme morphismes dans $\hat{\mathcal{O}}_{U,p}^m$. Réciproquement, un germe d'application inversible f , solution des équations différentielles engendrant $\mathcal{I}$ définit un morphisme u par $u(y) = f$. Nous identifierons souvent, par abus de langage, un idéal différentiel avec ses solutions formelles.

Rappelons une propriété générale des systèmes différentiels réduits déjà signalée et prouvée dans [Ma5].

Lemme 1.1.3 Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel réduit dans $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}$ ne rencontrant pas l'anneau $\mathcal{O}_U$. L'anneau $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}/\mathcal{I}$ est sans torsion sur l'anneau $\mathcal{O}_U$.

Preuve. – Soient f dans $\mathcal{O}_\Delta$ et m dans $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}/\mathcal{I}$ telles que $fm = 0$. Pour tout point p dans Δ , on peut supposer qu'il existe un entier ℓ tel que $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^\ell}(p) \neq 0$. En dérivant le produit on a $\frac{\partial f}{\partial x_1} m + f D_1 m = 0$ d'où $\frac{\partial f}{\partial x_1} m^2 = 0$. Par récurrence on obtient $\frac{\partial^\ell f}{\partial x_1^\ell} m^k = 0$ d'où la nullité de m^k donc de m au-dessus d'un voisinage de p . $\square$

Etant donné un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre $k : \mathcal{I}_k$, l'idéal $pr_q \mathcal{I}_k$ peut contenir des équations d'ordre k n'appartenant pas à $\mathcal{I}_k$. Ceci nous interdit de considérer les jets d'ordre k solutions de $\mathcal{I}_k$ comme des jets de solutions formelles. Les systèmes différentiels ayant de bonnes propriétés d'intégrabilité formelle ($pr_q \mathcal{I}_k \cap \mathcal{O}_{J_{k+s}} = pr_s \mathcal{I}_k$) sont les systèmes involutifs. Les théorèmes d'involutivité générique de Cartan-Kuranishi et de B. Malgrange nous assurent que n'importe quel système différentiel est équivalent à un système involutif en dehors d'une hypersurface de conditions initiales.

Soit $\mathcal{I}_k$ un système d'équations d'ordre k tel que si $f \in \mathcal{I}_k \cap \mathcal{O}_{J_{k-1}(U \rightarrow V)}$ alors $D_i f \in \mathcal{I}_k$. On note S_k la variété analytique définie par $\mathcal{I}_k$ d'anneau $\mathcal{O}_{S_k} = \mathcal{O}_{J_k} / \mathcal{I}_k$ et pour f dans $\mathcal{O}_{J_k}$ on note δf le symbole de f , c'est-à-dire sa différentielle modulo les dx_i et les dz_j^α pour $|\alpha| \leq k-1$. Soient $f_1, \dots, f_p$ un système d'équations qui engendre localement $\mathcal{I}_k$. Le premier prolongement de l'idéal est engendré par les f_ℓ et les $D_i f_\ell$. Pour trouver un zéro de $pr_1 \mathcal{I}_k$ dans $J_{k+1}(U \rightarrow V)$ au-dessus d'un zéro de $\mathcal{I}_k$ dans $J_k(U \rightarrow V)$, il faut résoudre un système d'équations

$$\sum_{j, |\alpha|=k} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha+\epsilon_i} = \sum_{j, |\alpha|<k} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha+\epsilon_i}.$$

De même, pour que $pr_2 \mathcal{I}_k$ ait des zéros au-dessus de ceux de $pr_1 \mathcal{I}_k$, il faut résoudre des équations de la forme

$$\sum_{j, |\alpha|=k} \frac{\partial f}{\partial y_j^\alpha} y_j^{\alpha+\epsilon_i+\epsilon_\ell} = *.$$

La nature des prolongements successifs de $\mathcal{I}_k$ est donc contrôlée par les symboles.

On note $A[\xi]$ l'anneau des polynômes en $\xi_1, \dots, \xi_n$ à coefficients dans un anneau A et $A[\xi]_k$ l'anneau des polynômes homogènes de degré k .

Définition 1.1.4 Après la substitution de δy_j^α par $\xi^\alpha \delta y_j$,

- on appelle symbole d'ordre k de $\mathcal{I}_k$ le $\mathcal{O}_{S_k}$ -module N_k engendré dans $\oplus_j \mathcal{O}_{S_k}[\xi]_k \delta y_j = \mathcal{O}_{S_k}[\xi]_k^m$ par les classes modulo $\mathcal{I}_k$ des δf ;
- on appelle symbole de $\mathcal{I}_k$ le $\mathcal{O}_{S_k}$ -module gradué N engendré par N_k dans $\mathcal{O}_{S_k}[\xi]^m$;
- on appelle module caractéristique de $\mathcal{I}_k$, le module gradué quotient $M_k = \mathcal{O}_{S_k}[\xi]^m / N$.

Dans la définition des systèmes différentiels ayant de bonnes propriétés de prolongement, les symboles interviendront par l'intermédiaire des évaluations ponctuelles du module caractéristique sur S_k . On demandera à ces derniers d'être involutifs.

Définition 1.1.5 Soit M un $\mathbb{C}[\xi]$ -module gradué. On dira que M est ℓ -involutif si il existe une base $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ de $\mathbb{C}[\xi]_1$ vérifiant pour tout $q \geq \ell$:

Pour $i = 1 \dots n$, la multiplication par η_i

$$M_q / (\eta_1, \dots, \eta_{i-1}) M_{q-1} \rightarrow M_{q+1} / (\eta_1, \dots, \eta_{i-1}) M_q$$

est injective et $M_q / (\eta_1, \dots, \eta_n) M_{q-1} = 0$

Définition 1.1.6 *On dira qu'un système différentiel $\mathcal{I}_\ell$ est ℓ -involutif si :*

1. S_ℓ est lisse,
2. M_ℓ et $M_{\ell+1}$ sont localement libres,
3. en tout point a de S_ℓ , $M(a)$ est ℓ -involutif,
4. $pr_1 S_\ell \rightarrow S_\ell$ est surjectif.

Nous utiliserons les définitions précédentes uniquement à travers les trois théorèmes suivants. Pour leurs démonstrations, nous renvoyons le lecteur à [Ma7].

Théorème de Cartan-Kähler 1.1.7 *Si $\mathcal{I}_\ell$ est ℓ -involutif alors $pr_1 \mathcal{I}_\ell$ l'est aussi. Pour tout jet d'ordre ℓ solution de $\mathcal{I}_\ell$, il existe une solution convergente de $\mathcal{I}_\ell$ ayant ce jet d'ordre ℓ .*

Théorème d'involutivité générique 1.1.8 ([Ma7]) *Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent, différentiel et réduit de $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}$. Quitte à diminuer les polydisques U et V , il existe un entier ℓ et un sous-ensemble analytique fermé de codimension un $Z_\ell \subset S_\ell$ vérifiant :*

1. en dehors de Z_ℓ , $\mathcal{I}$ est ℓ -involutif,
2. pour tout entier q , en dehors de Z_ℓ , $\mathcal{I}_{\ell+q}$ est le prolongement d'ordre q de $\mathcal{I}_\ell$ et il n'y a aucune composante de $\mathcal{I}_{\ell+q}$ au-dessus de Z_ℓ .

Théorème 1.1.9 *Soit $\mathcal{I}$ un idéal différentiel réduit de $\mathcal{O}_{J(U \rightarrow V)}$. Il existe un entier ℓ tel que l'idéal $\mathcal{I}$ soit l'idéal réduit différentiablement engendré par $\mathcal{I}_\ell$.*

1.2 $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie

1.2.1 Définitions

Dans [Ma5] B. Malgrange définit la notion de $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie et montre plusieurs propriétés de ces objets. Nous commençons par rappeler les définitions relatives aux $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie au-dessus d'un polydisque Δ de $\mathbb{C}^n$.

Nous noterons $J_k^*(\Delta)$ (au lieu de $J_k^*(\Delta \rightarrow \Delta)$ dans le paragraphe précédent) l'espace des jets d'ordre k d'applications inversibles de Δ dans Δ . Le choix d'une coordonnée x sur Δ permet de faire l'identification :

$$J_k^*(\Delta) = \Delta \times \Delta \times GL_n(\mathbb{C}) \times \prod_{2 \leq |\alpha| \leq k} \mathbb{C}^{n|\alpha|}$$

avec les coordonnées naturelles (x_i, y_i, y_i^α) . Étant donné un jet d'application $y(x)$ de Δ dans Δ , nous regrouperons les dérivées y_i^α suivant leurs ordres $|\alpha|$. Nous noterons y' la jacobienne de y par rapport à x , y'' la hessienne (qui est élément de $S^2 \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$) de y par rapport à x , y''' élément de $S^3 \mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$ la forme trilinéaire des dérivées troisièmes ...

Les espaces $J_k^*(\Delta)$ sont munis d'une structure de groupeïde compatible avec l'anneau $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$ par la donnée

- de la projection source $s : J_k^*(\Delta) \rightarrow \Delta$ définie par $s(x, y, \dots) = x$,
- de la projection but $t : J_k^*(\Delta) \rightarrow \Delta$ définie par $t(x, y, \dots) = y$,
- d'une composition $c : J_k^*(\Delta) \times_{\Delta} J_k^*(\Delta) \rightarrow J_k^*(\Delta)$ définie sur les couples de jets (h, g) tels que $s(h) = t(g)$ par

$$c((x, y, y', y'', \dots), (y, z, z', z'', \dots)) = (x, z, z'y', z''(y', y') + z'y'', \dots),$$

- d'une identité : la sous-variété définie par les équations $x_i = y_i$ et $y_i^{\epsilon_j} = \delta_i^j$ pour $0 \leq i, j \leq n$ et $y_i^{\alpha} = 0$ pour $|\alpha| \geq 2$,
- d'une inversion $i : J_k^*(\Delta) \rightarrow J_k^*(\Delta)$ qui à un jet $(x, y, y', y'', \dots)$ fait correspondre le jet

$$(y, x, (y')^{-1}, -(y')^{-1}y''((y')^{-1}, (y')^{-1}), \dots),$$

Toutes ces flèches sont compatibles avec les projections naturelles $J_{k+1}^*(\Delta) \rightarrow J_k^*(\Delta)$ ce qui permet de les définir sur l'espace $J^*(\Delta) = \varprojlim J_k^*(\Delta)$ muni de l'anneau $\mathcal{O}_{J^*(\Delta)} = \varinjlim \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$. Les définitions suivantes sont issues de [Ma5].

Définition 1.2.1 *Un groupeïde d'ordre k sur Δ est donné par un idéal $\mathcal{I}_k$ de $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$ tel que :*

- (1) $\mathcal{I}_k \subset \ker e^*$,
- (2) $i^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k$,
- (3) $c^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k \otimes_{\mathcal{O}_{\Delta}} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{O}_{\Delta}} \mathcal{I}_k$.

Cette définition est naturelle mais en pratique trop restrictive pour nos besoins. Nous devons autoriser des singularités dans les équations définissant le groupeïde. Il faut alors utiliser la définition plus souple suivante.

Définition 1.2.2 *Un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie sur Δ est donné par un idéal réduit $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\Delta)}$ tel que*

- pour tout entier k , $\mathcal{I}_k$ est cohérent,
- $\mathcal{I}$ soit stable par dérivation,
- sur tout polydisque relativement compact Δ' , il existe un entier k et un ensemble analytique fermé Z de Δ' tels que pour tout $\ell \geq k$, $\mathcal{I}_{\ell} = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_{\ell}^*(\Delta)}$ vérifie

(i) les inclusions (1) et (2) de la définition 1.2.1,

(ii) l'inclusion (3) de la définition 1.2.1 sur tout voisinage de $(x, y, z) \in (\Delta' - Z) \times (\Delta' - Z) \times (\Delta' - Z)$.

Nous ne nous intéresserons qu'aux germes de $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Nous fixerons donc un polydisque sur lequel les inclusions (3) sont valables. Comme nous l'avons signalé au paragraphe précédent, nous identifierons parfois un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie avec l'ensemble de ses solutions formelles. En particulier nous dirons qu'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie d'idéal $\mathcal{I}$ est inclus dans un second d'idéal $\mathcal{J}$ si l'idéal $\mathcal{I}$ contient l'idéal $\mathcal{J}$

et qu'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie contient un difféomorphisme si ce dernier est solution des équations de $\mathcal{I}$.

Donnons quelques exemples de $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie :

Exemple 1.2.3 *Le groupeïde d'invariance d'une fonction méromorphe $\frac{P}{Q}$ est un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie dont l'idéal est différentiablement engendré par :*

$$Q(x)P(y) - Q(y)P(x).$$

Les propriétés (1) et (2) d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie sont évidentes. La propriété (3) est vraie en dehors du lieu d'indétermination de $\frac{P}{Q}$. En effet, les égalités

$$\begin{aligned} Q(z)[Q(x)P(y) - Q(y)P(x)] \\ = Q(y)[Q(x)P(z) - Q(z)P(x)] - Q(x)[Q(z)P(y) - Q(y)P(z)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(z)[Q(x)P(y) - Q(y)P(x)] \\ = P(y)[Q(x)P(z) - Q(z)P(x)] - P(x)[Q(z)P(y) - Q(y)P(z)] \end{aligned}$$

donnent l'inclusion voulue tant que $P(z) \neq 0$ ou $Q(z) \neq 0$. L'ensemble Z de la définition est donc inclus dans le lieu d'indétermination de la fonction méromorphe.

Exemple 1.2.4 *Le groupeïde d'invariance d'un champ méromorphe de tenseurs, $\frac{1}{m}T$ avec T holomorphe, est un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie dont l'idéal est différentiablement engendré par les composantes de $m \Gamma^*T - m \circ \Gamma T$. Les propriétés (1), (2) et (3) proviennent de l'égalité*

$$\Gamma_2^* \Gamma_1^* \frac{1}{m}T - \frac{1}{m}T = \Gamma_2^* (\Gamma_1^* \frac{1}{m}T - \frac{1}{m}T) - (\Gamma_2^* \frac{1}{m}T - \frac{1}{m}T)$$

qui se réécrit

$$\begin{aligned} m \circ \Gamma_2 (m \Gamma_2^* \Gamma_1^* T - m \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1 T) \\ = m (m \circ \Gamma_2 \Gamma_2^* \Gamma_1^* T - m \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1 \Gamma_2^* T) - m \circ \Gamma_2 \circ \Gamma_1 (m \Gamma_2^* T - m \circ \Gamma_2 T) \end{aligned}$$

L'ensemble Z est alors inclus dans le lieu des pôles de m .

Exemple 1.2.5 *Le groupeïde d'invariance d'un champ d'hyperplans donné par une 1-forme ω intégrable ($\omega \wedge d\omega = 0$) est un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Son idéal est engendré par les composantes de $\Gamma^*\omega \wedge \omega$ ou encore, en coordonnées dans lesquelles $\omega = \sum \omega_i dx_i$, par $\frac{(\Gamma^*\omega)_i}{(\Gamma^*\omega)_j} - \frac{\omega_i}{\omega_j}$. La troisième inclusion est vérifiée en dehors du lieu d'annulation de ω .*

Les autres exemples que l'on pourrait donner sont des généralisations de ceux-ci en considérant les groupeïdes d'invariance (ou d'isométries) de structures géométriques d'ordre supérieur à un (voir [Gr], [Dum]), nous reviendrons sur ce point dans la partie 1.3. Les exemples suivants ne sont pas des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie.

Contre-exemple 1.2.6 (donné par Lie voir [Ca2]) *L'ensemble des transformations de $\mathbb{C}^2$ de la forme $\begin{cases} X = f(x) \\ Y = f(y) \end{cases}$ forment un pseudo-groupe de transformations du plan mais ne satisfont pas à un ensemble d'équations aux dérivées partielles définissant un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie.*

Contre-exemple 1.2.7 *L'ensemble des transformations de $\mathbb{CP}^1$ formé des intégrées d'une application rationnelle et de ses branches inverses forme un pseudo-groupe. Ici encore celui-ci n'est pas composé de solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles convenable. Nous regarderons plus en détail cet exemple dans la partie 3.*

Pour la définition suivante nous aurons besoin d'identifier le tangent vertical de $J_k^*(\Delta)$ le long de l'identité à l'espace des jets d'ordre k de section du fibré tangent de $J_k^*(\Delta \rightarrow T\Delta)$. Soit X_k un jet d'ordre k de champ de vecteurs en un point p sur le polydisque vertical (le polydisque but), et X un germe de champ de vecteurs ayant ce jet d'ordre k . Ce champ se prolonge (définition 1.1.1) en un champ de vecteurs fibré sur $J_k^*(\Delta)$ c'est-à-dire en une section du tangent vertical à $J_k^*(\Delta)$. La valeur de cette section au-dessus de p ne dépend que de X_k (remarque 1.1.2).

Définition 1.2.8 *Grâce à l'identification ci-dessus, on peut identifier les sections de l'espace des jets $J_k^*(\Delta \rightarrow T\Delta)$ aux champs de vecteurs verticaux sur $J_k^*(\Delta)$ le long de l'identité. Ceci définit un crochet $[\cdot, \cdot]$ sur les sections de $J_k^*(\Delta \rightarrow T\Delta)$ en ramenant le crochet de Lie. C'est le crochet de Spencer. Ce crochet vérifie $[X^{(k)}, Y^{(k)}] = [X, Y]^{(k)}$ pour les couples de champs de vecteurs sur Δ .*

Définition 1.2.9 *La $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie d'idéal $\mathcal{I}$ est le linéarisé du $\mathcal{D}$ -groupeïde le long de l'identité. Elle est donnée par l'idéal différentiel linéaire $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ de $\mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow T\Delta)}$ engendré par les équations*

$$\mathcal{L}(E) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial E}{\partial y_i}(x, x, id, 0, \dots, 0) a_i + \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\partial E}{\partial y_i^\alpha}(x, x, id, 0, \dots, 0) a_i^\alpha \right)$$

pour E appartenant à $\mathcal{I}_k$. Les a_i sont les coordonnées sur les fibres de $T\Delta$ induites par le choix de coordonnées x_i sur Δ .

Une solution de $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow T\Delta)}/\mathcal{L}(\mathcal{I})$ dans $\mathcal{O}_{\Delta, p}^n$ commutant aux dérivations. Le choix de la coordonnée x sur Δ identifie $\mathcal{O}_{\Delta, p}^n$ aux germes de champs de vecteurs en p . Soient $(a_i(x))_{1 \leq i \leq n}$ les images des $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sous ce morphisme : le champ $\sum a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ est appelé champ solution de $\mathcal{L}(\mathcal{I})$. Les équations d'ordre inférieures à k du système linéarisé décrivent un sous-fibré vectoriel de $J^*(\Delta \rightarrow T\Delta)$. Une section de ce fibré sera appelée section solution à l'ordre k .

Proposition 1.2.10 ([Ma5]) *Si $\mathcal{I}$ est l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie, le crochet de Spencer de deux sections solutions de $\mathcal{L}(\mathcal{I}) \cap \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta \rightarrow T\Delta)}$ est encore une section solution. En particulier le crochet de Lie de deux champs solutions de $\mathcal{L}(\mathcal{I})$ est encore un champ solution.*

Définitions 1.2.11

1. Une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie est donnée par un idéal différentiel linéaire $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow T\Delta)}$ tel que pour tout ℓ , les sections solutions de $\mathcal{L}_\ell = \mathcal{L} \cap \mathcal{O}_{J_\ell^*(\Delta \rightarrow T\Delta)}$ soient stables par le crochet de Spencer.
2. Nous dirons qu'une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie est de rang r lorsque le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des champs solutions est de dimension r .
3. Une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie sera dite intégrable si elle est la $\mathcal{D}$ -algèbre d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie.
4. Un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie sera dit transitif lorsque les champs solutions de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie évalués en un point générique x engendrent $T_x\Delta$.

Reprenons les exemples précédents.

Exemple 1.2.3 (bis) *Les équations linéarisées de celles du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie d'invariance d'une fonction méromorphe $\frac{P}{Q}$ sont $d(\frac{P}{Q})(X) = 0$ c'est-à-dire $QdP(X) - PdQ(X) = 0$ pour un champ de vecteur X .*

Exemple 1.2.4 (bis) *Les équations linéarisées de celles du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie d'invariance d'un champ méromorphe de tenseurs $\frac{1}{m}T$ sont $L_X(\frac{1}{m}T) = 0$ où L_X désigne la dérivée de Lie le long du champ X . Cette équation se réécrit $mL_XT - dm(X)T$.*

Exemple 1.2.5 (bis) *Les équations linéarisées de celles du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie d'invariance d'un champ d'hyperplan sont $L_X\omega \wedge \omega = 0$.*

1.2.2 Premières propriétés

Les premières propriétés des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie sont données dans [Ma5]. Nous renvoyons à cet article pour les preuves des trois théorèmes que nous rappelons ici. Lorsqu'on applique le théorème d'involutivité générique au système différentiel d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie, celui-ci devient :

Théorème 1.2.12 ([Ma5]) *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Quitte à rétrécir Δ , il existe un entier k et un sous-ensemble analytique Z de Δ fermé de codimension un tel que :*

1. $\mathcal{I}_k$ est involutif au-dessus de $(\Delta - Z)^2$ (nous dirons aussi en dehors de Z),
2. pour tout entier q , $\mathcal{I}_{k+q} = \text{pr}_q\mathcal{I}_k$ en dehors de Z .

Ce théorème permet de montrer le théorème de prolongement suivant :

Théorème 1.2.13 ([Ma5]) *Soit $\mathcal{I}_k$ un système différentiel d'ordre k . On note $\mathcal{I}$ l'idéal différentiel qu'il engendre et $\mathcal{I}^{\text{réd}}$ l'idéal réduit de $\mathcal{I}$. Supposons que $\mathcal{I}_k$ soit inclus dans $\ker e^*$, soit stable par i^* et qu'il existe un ensemble analytique Z de Δ fermé de codimension un tel que $\mathcal{I}_k$ définisse un groupoïde d'ordre k en dehors de Z . Alors*

1. $\mathcal{I}^{\text{réd}}$ est l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie,
2. il existe un ensemble analytique de Δ fermé de codimension un Z' tel que en dehors de Z' , $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{réd}}$.

Le théorème de “noetherianité” 1.1.9 permet de montrer :

Théorème 1.2.14 ([Ma5]) *Soient $\mathcal{I}^\alpha$ des idéaux de $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie. L'idéal réduit engendré par la somme des $\mathcal{I}^\alpha$ est encore l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie.*

1.3 Structures géométriques

Dans la suite nous allons montrer qu'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif laisse invariant une structure géométrique. Nous allons commencer par rappeler la définition de structure géométrique selon [Gr] (voir aussi [Dum]).

Un repère d'ordre k sur Δ en p est un jet d'ordre k de biholomorphisme entre $(\mathbb{C}^n, 0)$ et (Δ, p) . Soit R_k le fibré au-dessus de Δ des repères d'ordre k muni de l'anneau des fonctions holomorphes sur Δ et polynomiales sur la fibre. Cet espace est muni d'une action par composition à la source du groupe $GL_n^{(k)}$ des jets d'ordre k de biholomorphismes de $(\mathbb{C}^n, 0)$ et d'une action par composition au but du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $J_k^*(\Delta)$ donnée par un morphisme

$$R_k \times_{\Delta} (J_k^*(\Delta), s) \longrightarrow R_k.$$

Soit V une variété quasi-projective sur laquelle $GL_n^{(k)}$ agit à gauche.

Définition 1.3.1 *Une structure géométrique d'ordre k et de type V sur Δ est une section s du fibré $R_k \times_{GL_n^{(k)}} V$, c'est-à-dire un application équivariante $s : R_k \rightarrow V$ ($s(\varphi g) = g^{-1}s(\varphi)$ pour φ dans R_k et g dans $GL_n^{(k)}$).*

On dit que la structure est holomorphe, méromorphe, ... suivant la nature de la section. On appelle $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie d'invariance (ou des isométries) de s le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie défini par les équations $f^*s = s$ où f est un élément de $J_k^*(\Delta)$ et f^* désigne l'action de f induite sur $R_k \times_{GL_n^{(k)}} S$ par l'action de f sur R_k .

Lorsque V est une variété homogène pour $GL_n^{(k)}$ et que la section est holomorphe, la structure géométrique est appelée G -structure (voir [Kob]). Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de

Lie d'isométrie est alors transitif stable par composition partout et ses équations sont involutives.

Pour montrer le théorème suivant, nous considérerons la définition équivalente de structure géométrique en terme de section d'un $GL_n^{(k)}$ -fibré construit sur le fibré des cartes d'ordre k (les jets d'ordre k de biholomorphisme de Δ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$).

Théorème 1.3.2 *Tout $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif au-dessus de Δ est le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie d'invariance d'une structure géométrique méromorphe sur Δ .*

Preuve. – Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie au-dessus d'un polydisque Δ de $\mathbb{C}^n$. D'après le théorème 1.1.9, il existe un entier ℓ tel que $\mathcal{I}$ soit différentiablement engendré par $\mathcal{I}_\ell$. On choisit l'entier ℓ minimal tel que $\mathcal{I}_\ell$ engendre $\mathcal{I}$ et soit stable par les inclusions qui font de $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie.

On construit le fibré portant une G -structure invariante par le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de la manière suivante :

On choisit une ℓ -carte $\underline{c}_\ell : (\Delta, y) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ en un point y régulier pour le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie (en dehors de Z). Cette carte permet de faire agir le groupe d'isotropie de y , $\mathcal{G}_{y,y}$, sur les ℓ -cartes par $g \cdot c_\ell = \underline{c}_\ell \circ g \circ \underline{c}_\ell^{-1} \circ c_\ell$. On considère alors le quotient de l'espace des ℓ -cartes par l'action de ce groupe : $\mathcal{C}_\ell / \mathcal{G}_{y,y}$.

Lemme 1.3.3 (voir [Kob]) *Le quotient est un fibré $\mathcal{V}$ au-dessus de Δ de fibre une variété quasi-projective V et ne dépend pas du point x . De plus ce fibré est muni d'une action algébrique de $J_\ell^*(\Delta)$.*

Preuve du lemme 1.3.3. – La projection source fibre $\mathcal{C}_\ell$ au-dessus de Δ et l'action décrite au-dessus est fibrée au-dessus de l'identité. Grâce à la transitivité du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie, le quotient d'une fibre par $\mathcal{G}_x$ est indépendant de la fibre. Pour étudier la nature du quotient de la fibre, on utilise les arguments classiques de construction de quotients ([Sp], [Mu]). On identifie la fibre avec le groupe des jets d'ordre ℓ d'applications inversibles de $(\mathbb{C}^n, 0)$ dans $(\mathbb{C}^n, 0)$ qui est un groupe algébrique linéaire. Le quotient d'un groupe algébrique linéaire par un sous-groupe algébrique donne une variété quasi-projective. Le choix d'un autre point $\underline{y}$, conduit à une action de $\mathcal{G}_{\underline{y},\underline{y}} \sim \mathcal{G}_{y,y}$ conjuguée à celle que nous avons considérée. Le quotient est le même.

Le fibré $\mathcal{C}_\ell$ est muni d'une action algébrique de $J_\ell^*(\Delta)$. Cette action commute à l'action de $\mathcal{G}_{y,y}$ et donc passe au quotient. Nous la noterons

$$S : \mathcal{V} \times_\Delta (J_\ell^*(\Delta), t) \longrightarrow \mathcal{V}$$

□

On a donc construit une application de

$$I : J_\ell^*(\Delta \rightarrow (\Delta, x)) \longrightarrow \mathcal{V}$$

envoyant pour tout $y \notin Z$, l'espace des jets d'ordre ℓ solutions de $\mathcal{I}_\ell$ de source x et de but $y : \mathcal{G}_{x,y}$ sur un point $s(y) = I(\mathcal{G}_{y,x})$ de V_y . Ceci nous donne une section $s : \Delta - Z \rightarrow \mathcal{V}$.

Lemme 1.3.4 *La section $s : \Delta - Z \rightarrow \mathcal{V}$ se prolonge méromorphiquement à Δ .*

Preuve du lemme 1.3.4. – Soit f_ℓ un jet d'ordre ℓ d'application de (Δ, z) sur (Δ, y) . Ce jet est solution de $\mathcal{G}_{z,y}$ si et seulement si la composée de toute solution de $\mathcal{G}_{y,x}$ avec f_ℓ est solution de $\mathcal{G}_{z,x}$. Si on note f_ℓ^* l'action de f_ℓ sur le fibré $\mathcal{V}$, cette condition se réécrit $f_\ell^* s(y) = s(z)$. Les équations $f_\ell^* s = s$ définissent la restriction de notre $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de $\Delta - Z$.

En choisissant des coordonnées homogènes $[s_0 : \dots : s_k]$ sur V , les équations d'invariance de la section s sous l'action d'un changement de source $y(x)$ s'écrivent :

$$S_0 \left(s(y), \frac{\partial y}{\partial z} \dots \right) s_i(z) - S_i \left(s(y), \frac{\partial y}{\partial z} \dots \right) s_0(z) = 0 \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Choisissons maintenant un système d'équations $E_1, \dots, E_p$ engendrant l'idéal $\mathcal{I}_\ell$ au-dessus de Δ . Ces équations engendrent en particulier $\mathcal{I}_\ell$ au-dessus de $\Delta - Z$. En évaluant ces égalités en $y = \underline{y}$, on obtient deux systèmes de générateurs pour l'idéal $\mathcal{I}_\ell$ restreint à $y = \underline{y}$ qui est un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_\Delta[\frac{\partial \underline{y}}{\partial z}, \dots]$. Le premier est donné par les équations

$$\underline{S}_0 \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial z} \dots \right) s_i(z) - \underline{S}_i \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial z} \dots \right) s_0(z),$$

et engendre $\mathcal{I}_\ell$ dans $\mathcal{O}_{\Delta-Z}[\frac{\partial \underline{y}}{\partial z}, \dots]$, le second par

$$\underline{E}_i \left(z, \frac{\partial \underline{y}}{\partial z} \dots \right) = \sum a_i^j(z) B_j \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial z} \dots \right)$$

où les $\{B_j\}_{j=1\dots r}$ forment un système libre du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}[\frac{\partial \underline{y}}{\partial z}, \dots]$ avec $B_i = \underline{S}_i$ pour $i \in \{0, \dots, k\}$.

Considérons M le $\mathcal{M}_\Delta$ -espace vectoriel engendré par les B_j et le sous espace vectoriel $N = \mathcal{I}_\ell \cap M$. On complète le système libre de vecteurs de N , $\{\underline{E}_i\}_{i=1\dots p}$, en une base de N , $\{E_i\}_{i=1\dots q}$. On notera M_Z l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{\Delta-Z} \otimes M$ et N_Z le sous-espace vectoriel engendré par N . On complète le système de vecteurs libre de N_Z $\{F_i = \underline{S}_0 \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial z} \dots \right) \frac{s_i(z)}{s_0(z)} - \underline{S}_i \left(\frac{\partial \underline{y}}{\partial z} \dots \right)\}_{i=1\dots k}$ en une base avec des vecteurs de la base $\{E_i\}$. On a construit deux bases du sous-espace vectoriel N_Z , une correspondant à la matrice $(a_i^j)_{i=1\dots q}^{j=1\dots r}$ à coefficient dans $\mathcal{M}_\Delta$ et l'autre à la matrice par blocs :

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} s_1/s_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ s_2/s_0 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \hline & (a_i^j) & & & (\underline{a}_i^j) & \end{array} \right)$$

où la matrice $(\begin{smallmatrix} a_i^j \\ \underline{a}_i^j \end{smallmatrix})$ est la matrice des coordonnées des vecteurs E_i complétant le système libre $\{F_i\}$ en une base.

Les coordonnées de Plücker de N_Z calculées avec la première base donnent des coordonnées dans $\mathcal{M}_\Delta$. Les n premières coordonnées calculées avec la seconde base donnent $\frac{s_i(z)}{s_0(z)} \min_1(\underline{a}_i^j)$ où $\min_1$ désigne le premier mineur (non nul) de la matrice. En identifiant les coordonnées de Plücker, on obtient la méromorphie de la section s . $\square$

Considérons un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de Δ , et construisons le fibré $\mathcal{V}$ comme dans le lemme 1.3.3 ainsi que la section méromorphe s du lemme 1.3.4. Les équations $f^*s = s$ définissent un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de Δ coïncidant avec le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie dont nous sommes partis au-dessus de $\Delta - Z$. Le lemme 1.1.3 assure que ces deux $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie sont les mêmes. $\square$

Remarque 1.3.5 *Le fibré $\mathcal{V}$ est entièrement déterminé par $\mathcal{G}$. Ce n'est pas le cas de la section s . Si φ est un élément de $GL_n^{(k)}$ agissant par composition au but sur les ℓ -cartes tel que*

$$\varphi \circ \mathcal{G}_{y,y} = \mathcal{G}_{y,y} \circ \varphi$$

alors φ donne par passage au quotient un automorphisme de V . Les composition au but et à la source commutant, la section $\varphi(s)$ décrira le même $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Néanmoins, supposons que deux sections s et $\underline{s}$ de $\mathcal{V}$ décrivent le même $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie transitif et qu'il existe un point y en dehors du lieu de non-involutivité tel que $\underline{s}(y) = s(y)$. Prenons un jet $(x, y, y', \dots)$ solution de $\mathcal{G}$. Alors $S(s(y), y', \dots) = s(x)$ et $S(\underline{s}(y), y', \dots) = \underline{s}(x)$ d'où $\underline{s} = s$.

1.4 Le groupeïde de Galois d'un feuilletage

Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage holomorphe singulier de codimension q défini par des formes $\omega_1, \dots, \omega_p$ dont les q premières sont indépendantes sur le corps des fonctions méromorphes vérifiant les conditions d'intégrabilité de Frobenius $d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q = 0$.

Le groupeïde d'holonomie d'un feuilletage est un objet transverse défini en dehors des singularités du feuilletage et il ne reflète pas complètement la complexité des singularités. Le groupeïde de Galois d'un feuilletage est la "clôture de Zariski" du groupeïde d'holonomie au sens de la définition suivante :

Définition 1.4.1 ([Ma5]) *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage holomorphe singulier de $(\mathbb{C}^n, 0)$. Son groupeïde de Galois est le plus petit $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie, $\text{Gal}(\mathcal{F})$, tel que les champs tangents à $\mathcal{F}$ soient solutions de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie.*

L'existence de cet objet est une conséquence direct du théorème 1.1.9. Quelques unes de ses propriétés ont été établies dans [Ma5].

Remarque 1.4.2 Les équations $\omega_i(X) = 0$ définissant les champs tangents au feuilletage sont linéaires d'ordre zéro. L'hypothèse d'intégrabilité de Frobenius se traduit par le fait qu'elles définissent une sous- $\mathbb{C}$ -algèbre de Lie de $T\Delta$. L'idéal engendré par ces équations et toutes leurs dérivées définit une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie, [Ma5]. Dans la plupart des cas cette $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie n'est pas intégrable.

Définition 1.4.3 Un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie contient la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie définie par le feuilletage.

Le $\mathcal{D}$ -groupoïde $Aut(\mathcal{F}_\omega)$ des automorphismes du feuilletage dont les solutions sont les germes de difféomorphismes Γ vérifiant $\Gamma^*\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q = 0$ est un $\mathcal{D}$ -groupoïde admissible. Il contient tous les $\mathcal{D}$ -groupoïdes admissibles et en particulier le groupoïde de Galois du feuilletage. Nous allons étudier l'expression locale de celui-ci sur un ouvert de redressement U . Nous noterons t les coordonnées transverses et z les coordonnées tangentes. Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus de U sont donnés par des équations sur les différents espaces de jets

$$J_k^*(U) = U \times U \times GL_n(\mathbb{C}) \times_{2 \leq |\alpha| \leq k} \mathbb{C}^{n|\alpha|}.$$

Nous noterons (t, z) les coordonnées sur le premier U , (T, Z) les mêmes coordonnées sur le second U et $\frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial t^\alpha \partial z^\beta} T, \frac{\partial^{|\alpha|+|\beta|}}{\partial t^\alpha \partial z^\beta} Z$ les coordonnées naturelles sur l'espace des jets.

Lemme 1.4.4

1. Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage sur Δ et $(U, (t, z))$ un ouvert muni de coordonnées redressantes où t désigne les coordonnées transverses et z les coordonnées tangentes. L'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ est engendré sur U par des équations

$$\frac{\partial T_j}{\partial z_i} = 0 \text{ et } E_i(t, T, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial t^\alpha})$$

où les E_i sont les équations d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie au dessus du polydisque transverse $t(U)$.

2. Le rang du $\mathcal{D}$ -groupoïde transverse ainsi obtenu est indépendant de la carte choisie.

Définition 1.4.5 Ce rang est appelé rang transverse du $\mathcal{D}$ -groupoïde admissible.

Preuve. – Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible. Il s'obtient en complétant les équations de $\text{Aut}(\mathcal{F}_\omega) : \frac{\partial T_j}{\partial z_i} = 0$ par des équations supplémentaires $F_i(t, z, T, Z, \dots)$. Toute solution Γ de $\mathcal{I}$ se factorise sous forme $\Gamma^{trans} \circ \Gamma^{tang}$ avec

$$\Gamma^{trans}(t, z) = (T(t), z) \text{ et } \Gamma^{tang}(t, z) = (t, Z(t, z)).$$

Comme $\mathcal{I}$ définit un $\mathcal{D}$ -groupeïde admissible, toutes les transformations de la forme Γ^{tang} sont solutions de $\mathcal{I}$. Pour toute Γ solution de $\mathcal{I}$, Γ^{trans} est aussi solution de $\mathcal{I}$ et vérifie de plus les équations de l'idéal différentiel engendré par $(Z - z)$. L'idéal différentiel $\mathcal{I} + (Z - z)$ décrit un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie et est engendré par des équations de la forme

$$\frac{\partial T_j}{\partial z_i}, (Z_j - z_j), E_k(z, t, T, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial t^{|\alpha|}} \dots).$$

Les translations $\tau(t, z) = (t, z + a)$ sont solutions de $\mathcal{I}$ donc la conjugaison par τ laisse $\mathcal{I}$ invariant ainsi que $(Z - z)$. L'idéal engendré par les équations ci-dessus est donc égal à l'idéal engendré différentiablement par

$$\frac{\partial T_j}{\partial z_i}, (Z_j - z_j), E_k(z_0, t, T, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial t^{|\alpha|}} \dots).$$

Ceci permet de choisir des générateurs E_i indépendants de z . Considérons l'idéal $\mathcal{J} = \left(\frac{\partial T_j}{\partial z_i}, E_k(t, T, \dots, \frac{\partial^{|\alpha|} T}{\partial t^{|\alpha|}} \dots) \right)$. Comme $\mathcal{J} + (Z - z) = \mathcal{I} + (Z - z)$ est l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie, l'idéal engendré au-dessus du disque transverse par les équations $E_i(t, T, \dots, \frac{d^k T}{dt^k} \dots)$ définit un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Pour un entier ℓ assez grand, un jet d'ordre ℓ de transformation $\Gamma = \Gamma^{trans} \circ \Gamma^{tang}$ est solution de $\mathcal{J}_\ell$ si et seulement si Γ^{trans} est solution de $\mathcal{I}_\ell$. La partie tangente Γ^{tang} étant toujours solution de $\mathcal{I}_\ell$, $\mathcal{I}_\ell$ et $\mathcal{J}_\ell$ ont mêmes solutions parmi les jets d'ordre ℓ . Comme ce sont des idéaux réduits, ils sont égaux. Les théorèmes 1.2.12 et 1.2.13 permettent de conclure que $\mathcal{I} = \mathcal{J}$. $\square$

Ce lemme ramène l'étude locale en un point régulier du feuilletage de son groupeïde de Galois à la compréhension des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie définis au-dessus du polydisque transverse et de leur prolongement analytique sur le polydisque de départ. En particulier pour les feuilletages de codimension un, le groupeïde de Galois sera décrit par des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie au-dessus d'un disque. Nous allons dans le chapitre suivant étudier en détail ces $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie et obtenir une liste (théorème 2.1.4) puis appliquer nos résultats aux feuilletages de codimension un dans le chapitre 4.

Chapitre 2

$\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un germe de disque de $\mathbb{C}$

Reprenons les notations précédentes dans le contexte des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie sur un disque. Le choix d'une coordonnée x sur le disque induit des coordonnées $y, y_1, \dots$ sur les espaces de jets. Les équations décrivant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sont des équations différentielles ordinaires et celles de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie sont des équations différentielles linéaires.

Dans ce chapitre nous commencerons par déterminer les $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie sur un disque puis les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie intégrant ces algèbres. Dans une deuxième partie nous étudierons les solutions en des points singuliers des équations des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie. Ceci nous permettra de donner dans la troisième partie une classification analytique des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie sur un disque. Cette classification sera essentiellement un cas particulier de la classification analytique des germes de difféomorphismes telle qu'elle est présentée par J. Martinet et J.P. Ramis dans [M-R2]. Dans le quatrième paragraphe nous présenterons les calculs d'un représentant d'une classe analytique de $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie. Ils sont essentiellement déjà fait par J. Ecalle dans [Ec] mais les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie leurs donnent une nouvelle signification.

2.1 Liste des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie

Les arguments suivants prouvent qu'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est décrit par une seule équation. Soient $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie et k le plus petit entier tel que l'idéal $\mathcal{I}_k$ des équations d'ordre k de $\mathcal{I}$ engendre différentiablement $\mathcal{I}$. D'après l'hypothèse faite sur k , il existe une équation d'ordre k dans $\mathcal{I}_k - pr_1\mathcal{I}_{k-1}$. Les zéros de $pr_1\mathcal{I}_{k-1}$ sont fibrés sur les zéros de $\mathcal{I}_{k-1}$ et la fibre générique est une sous-variété de $\mathbb{C}$ donnée par une équation affine, c'est-à-dire un point dans le cas où $pr_1\mathcal{I}_{k-1}$ est non trivial ou tout $\mathbb{C}$ dans le cas contraire. Le premier cas étant exclu par l'hypothèse sur k , $\mathcal{I}_k$ ne contient que des équations d'ordre k et est donc engendré par une unique équation.

16 Chapitre 2. $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un germe de disque de $\mathbb{C}$

Ce fait sera important dans la suite mais la démonstration donnée au-dessus n'est pas nécessaire dans la mesure où il découlera immédiatement de la principalité de l'anneau $\mathbb{C}\{x\}[\frac{d}{dx}]$. L'idéal décrivant une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie est engendré par une seule équation. En divisant par le coefficient dominant de cette équation, on se ramène à étudier une équation normalisée méromorphe. Le choix d'une coordonnée x sur Δ donne des coordonnées $(x, a_0, \dots, a_k)$ sur $J_k^*(\Delta \rightarrow T\Delta)$.

Proposition 2.1.1 ([Ma4]) *Il n'y a que cinq types de $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie sur Δ , correspondant aux équations suivantes :*

<i>rang 0</i> : $a_0 = 0$	<i>notée</i>	$\mathcal{A}_0$
<i>rang 1</i> : $a_1 + \mu a_0 = 0$	"	$\mathcal{A}_1(\mu)$
<i>rang 2</i> : $a_2 + \mu a_1 + \mu' a_0 = 0$	"	$\mathcal{A}_2(\mu)$
<i>rang 3</i> : $a_3 + \nu a_1 + \frac{\nu'}{2} a_0 = 0$	"	$\mathcal{A}_3(\nu)$
<i>rang ∞</i> : pas d'équation	"	$\mathcal{A}_\infty$

μ et ν étant méromorphes sur Δ .

Preuve. – Un théorème de Lie [Lie] dit qu'une algèbre de Lie de champs de vecteurs holomorphes sur un disque est de rang inférieur ou égal à trois ou infini. L'équation engendrant l'idéal décrivant une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie est d'ordre inférieur ou égal à trois car en ses points réguliers le rang des solutions doit être au plus trois. La stabilité par crochet implique que si $a(x)$ et $b(x)$ sont deux solutions de l'équation, $a'b - b'a$ est aussi une solution. Examinons chacun des cas.

- Rang 1 : Toute équation $a' + \mu a = 0$ avec μ méromorphe n'ayant qu'une droite de solutions, elle définit une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang 1.

- Rang 2 : Soit $L(a) = a'' + \mu a' + \nu a = 0$ une équation d'ordre 2. Prenons a et b deux solutions de L . De l'égalité :

$$L(a'b - b'a) = (\nu - \mu')(a'b - b'a)$$

nous déduisons qu'une équation d'ordre 2 définit une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie si et seulement si elle est de la forme $a'' + \mu a' + \mu' a = 0$.

- Rang 3 : Soit $L(a) : a''' + \mu a'' + \nu a' + \lambda a = 0$ une équation d'ordre trois. Prenons trois solutions a, b, c de L linéairement indépendantes. L'égalité :

$$L(a'b - b'a) = (2\lambda - \nu')(ab' - a'b) - \mu'(ab'' - a''b) + \mu(a'b'' - a''b')$$

valable pour les couples (a, b) , (a, c) et (b, c) donne trois expressions nulles si et seulement si :

$$(2\lambda - \nu')C_1 - \mu'C_2 + \mu C_3 = 0$$

où les C_i sont les colonnes (au déterminant près) de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}^{-1}.$$

Le déterminant de cette matrice ne s'annulant pas, il faut et il suffit que $\nu' = 2\lambda$ et $\mu = 0$ pour que notre équation décrive une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. $\square$

Remarque 2.1.2 L'équation d'une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang deux s'écrit $(a' + \mu a)' = 0$ et celle d'une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang trois, $(a' + \mu a)'' - \mu(a' + \mu a)' = 0$ avec $\nu = 2\mu' - \mu^2$.

Proposition 2.1.3 Si $x = \varphi(\bar{x})$ est un changement de coordonnées, les équations de la proposition 2.1.1 dans les nouvelles coordonnées $(\bar{x}, \bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ sur $J_3(\Delta \rightarrow T\Delta)$ sont :

$$\begin{aligned} \text{rang } 0 : \bar{a}_0 &= 0 \\ \text{rang } 1 : \bar{a}_1 + \bar{\mu} \bar{a}_0 &= 0 \\ \text{rang } 2 : \bar{a}_2 + \bar{\mu} \bar{a}_1 + \bar{\mu}' \bar{a}_0 &= 0 \\ \text{rang } 3 : \bar{a}_3 + \bar{\nu} \bar{a}_1 + \frac{\bar{\nu}'}{2} \bar{a}_0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \bar{\mu} = \mu \circ \varphi \varphi' + \frac{\varphi''}{\varphi'} \text{ et } \bar{\nu} = \nu \circ \varphi (\varphi')^2 + 2 \frac{\varphi'''}{\varphi'} - 3 \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)^2.$$

Preuve. – Nous allons calculer les changements de coordonnées induit par φ sur $J_3(\Delta \rightarrow T\Delta)$. Un champ de vecteur $a(x) \frac{d}{dx}$ s'écrit dans la coordonnée $\bar{x} \frac{a \circ \varphi}{\varphi'} \frac{d}{d\bar{x}}$. On en déduit le changement de coordonnées :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(\bar{x}), \\ a_0 &= \varphi' \bar{a}_0, \\ a_1 &= \frac{\varphi''}{\varphi'} \bar{a}_0 + \bar{a}_1, \\ a_2 &= \frac{1}{\varphi'} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)' \bar{a}_0 + \frac{\varphi''}{(\varphi')^2} \bar{a}_1 + \frac{1}{\varphi'} \bar{a}_2, \\ a_3 &= \frac{1}{\varphi'} \left(\frac{1}{\varphi'} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)' \right)' \bar{a}_0 + \left[\frac{1}{(\varphi')^2} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \right)' + \frac{1}{\varphi'} \left(\frac{\varphi''}{(\varphi')^2} \right)' \right] \bar{a}_1 + \frac{1}{(\varphi')^2} \bar{a}_3, \end{aligned}$$

Les équations des $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie dans les nouvelles coordonnées se normalisent en divisant par le coefficient dominant en les équations annoncées. $\square$

Nous allons chercher à intégrer ces algèbres, c'est-à-dire trouver des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie ayant pour $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie celles de la liste 2.1.1.

Théorème 2.1.4

1. L'équation $\nu(y)y_1^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0$ définit l'unique $\mathcal{D}$ -groupoïde ayant pour $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_3(\nu)$ et sera noté $\mathcal{G}_3(\nu)$.
2. L'équation $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$ définit l'unique $\mathcal{D}$ -groupoïde ayant pour $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_2(\mu)$ et sera noté $\mathcal{G}_2(\mu)$.
3. La $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_1(\mu)$ n'est intégrable que lorsque μ a un pôle simple de résidu rationnel $\frac{p}{q}$. Dans ce cas les groupoïdes intégrant cette $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie sont définis par :

$$\gamma_k(y)y_1^{kq} - \gamma_k(x) = 0 \text{ avec } \gamma_k(x) = \exp(kq \int \mu)(x)$$

pour tout entier k . Ils seront notés $\mathcal{G}_1^k(\mu)$.

18 Chapitre 2. $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un germe de disque de $\mathbb{C}$

4. Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes ayant une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang nul sont définis par une équation $h(x) - h(y) = 0$ avec h holomorphe sur Δ .

Pour alléger les formules nous noterons $S(\varphi)$ pour $2\frac{\varphi'''}{\varphi'} - 3\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$.

La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant qui est la version sur le disque du lemme 1.1.3.

Lemme 2.1.5 *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal définissant un $\mathcal{D}$ -groupoïde. Si xF appartient à l'idéal $\mathcal{I}$ alors F appartient aussi à $\mathcal{I}$.*

Preuve du théorème 2.1.4. – Les solutions $\varphi : (\Delta, a) \rightarrow (\Delta, b)$ d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie laissent stable la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie du groupoïde. D'après la proposition 2.1.3, l'équation traduisant l'invariance de $\mathcal{A}_3(\nu)$ par φ est l'équation de $\mathcal{G}_3(\nu)$. Cette équation d'ordre trois est celle d'un sous-groupoïde de $J_3^*(\Delta - \{0\})$. L'identité est solution, et de la formule :

$$\begin{aligned} & \nu \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) ((\varphi_1 \circ \varphi_2)')^2 + S(\varphi_1 \circ \varphi_2)) - \nu \\ &= (\nu \circ \varphi_1 (\varphi_1')^2 + S(\varphi_1) - \nu) \circ \varphi_2 (\varphi_2')^2 + (\nu \circ \varphi_2 (\varphi_2')^2 + S(\varphi_2) - \nu) \end{aligned}$$

on déduit la stabilité par inversion et par la composition en dehors du point 0. Le théorème 1.2.13 de B. Malgrange, rappelé dans le chapitre précédent, permet de conclure que l'idéal réduit différentiablement engendré par l'équation de $\mathcal{G}_3(\nu)$ décrit un $\mathcal{D}$ -groupoïde. Ce $\mathcal{D}$ -groupoïde intègre $\mathcal{A}_3(\nu)$ et contient tous les $\mathcal{D}$ -groupoïdes intégrant cette algèbre. L'équation étant résolue par rapport à y_3 au-dessus de $\Delta - \{0\}$, un jet d'ordre k solution de $\mathcal{G}_3(\nu)$ se prolonge en un unique jet d'ordre $k + 1$ solution de l'idéal différentiel engendré par l'équation. On en déduit que si il existe un autre $\mathcal{D}$ -groupoïde intégrant $\mathcal{A}_3(\nu)$, les zéros de son idéal sont ceux de l'équation de $\mathcal{G}_3(\nu)$ au-dessus de $\Delta - \{0\}$. Les équations supplémentaires de son idéal sont de la forme $F(x, y, y_1, \dots, y_k)$ avec xF dans l'idéal engendré par $\mathcal{G}_3(\nu)$. Le lemme précédent permet de conclure.

L'équation de $\mathcal{G}_2(\mu)$ vérifiée par les φ laissant invariante la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_2(\mu)$ définit aussi un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie. On le vérifie grâce à l'égalité :

$$\begin{aligned} & \mu \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2) (\varphi_1 \circ \varphi_2)' + \frac{(\varphi_1 \circ \varphi_2)''}{(\varphi_1 \circ \varphi_2)'} - \mu \\ &= (\mu \circ \varphi_1 \varphi_1' + \frac{\varphi_1''}{\varphi_1'} - \mu) \circ \varphi_2 \varphi_2' + (\mu \circ \varphi_2 \varphi_2' + \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} - \mu). \end{aligned}$$

Comme l'équation est résolue par rapport à y_2 au-dessus de $\Delta - \{0\}$, on conclut qu'il n'y a pas d'autres $\mathcal{D}$ -groupoïdes intégrant $\mathcal{A}_2(\mu)$.

On prouve le troisième point du théorème en remarquant que quelque soit μ et quelques soient x et y dans $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$, l'équation définie sur $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times \mathbb{C}^*$

$$E(x, y, y_1) = \left(\exp\left(\int \mu\right) \right) (y) y_1 - \left(\exp\left(\int \mu\right) \right) (x) = 0$$

donne un $\mathcal{D}$ -groupoïde sur $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$ qui intègre $\mathcal{A}_1(\mu)$. Si $\mathcal{A}_1(\mu)$ est intégrable sur Δ par un $\mathcal{D}$ -groupoïde d'idéal $\mathcal{I}$, les équations de ce groupoïde s'annulent sur les zéros de E au voisinage de l'identité. Or les zéros de cette dernière équation sont lisses et connexes au-dessus de $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$, les équations de $\mathcal{I}$ s'annulent donc sur les zéros de E . Grâce au lemme précédent, $\mathcal{I}$ est inclus dans l'idéal engendré par E au-dessus de $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$. Quelque soit le jet d'ordre 1 (x, y, y_1) solution de l'équation E , il est aussi solution des équations d'ordre 1 de $\mathcal{I}$. En évaluant ces dernières en ce point, on obtient des équations holomorphes en x et y et polynomiales en $\frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}$. En fixant y tel que $\exp(\int \mu)(y)$ soit fini, ces équations donnent que $\exp(\int \mu)(x)$ est algébrique sur le corps des fonctions méromorphes sur Δ . On en déduit que μ doit avoir un pôle simple de résidu rationnel.

Il nous reste à prouver que les équations de $\mathcal{G}_1^k(\nu)$ sont les seules à intégrer $\mathcal{A}_1(\mu)$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde qui intègre cette $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie ; nous allons regarder les zéros de ses équations d'ordre un au-dessus de $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$. Nous connaissons déjà un zéro au-dessus de $(x, y) \in (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$, c'est celui de troisième coordonnée $y_1 = \frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}$. Les autres zéros au-dessus du même point différent de celui-ci d'une composition à la source par un jet d'ordre 1 solution des équations d'ordre un du $\mathcal{D}$ -groupoïde de la forme (x, x, θ) . De telles solutions forment un sous-groupe algébrique fini de $\mathbb{C}^*$. Il existe donc un entier k tel que tous les zéros de $\mathcal{I}$ au-dessus de (x, y) s'écrivent $(x, y, \theta \frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)})$ avec $\theta^k = 1$. Ce nombre k est indépendant du point (x, y) que l'on a choisi. Considérons l'équation

$$E_k : \left(\exp\left(\int \mu\right) \right)^k (y) y_1^k - \left(\exp\left(\int \mu\right) \right)^k (x).$$

Nous allons montrer que cette équation est en faite méromorphe sur $\Delta \times \Delta \times \mathbb{C}^*$. L'idéal réduit $\mathcal{I}_1$ des équations d'ordre inférieur ou égal à un définit une hypersurface de $\Delta \times \Delta \times \mathbb{C}^*$ et est donc engendré par une équation : $H(x, y, y_1)$. La fonction $\exp(\int \mu)$ n'étant d'efinie qu' à une constante multiplicative près, fixons $\tilde{y}$ tel que $\exp(\int \mu)(\tilde{y}) = 1$. Le graphe de $y_1 = \exp(\int \mu)(x)$ est donc solution de l'équation $H(x, \tilde{y}, y_1)$. La monodromie de $\exp(\int \mu)$ est donc un sous-groupe de $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$; ce qui implique la méromorphie de $\exp(\int \mu)^k$. L'équation E_k engendre donc l'idéal $\mathcal{I}_1$. En utilisant le lemme 1.1.3 et le théorème 1.2.13 comme précédemment, on obtient que cette équation engendre différentiablement $\mathcal{I}$.

Nous allons maintenant prouver le quatrième point du théorème 2.1.4. L'idéal des équations d'ordre 0 d'un tel groupoïde est engendré par une équation : $E \in \mathcal{O}_{\Delta \times \Delta}$. D'après le lemme 1.1.3 et le théorème 1.2.13, cette équation engendre différentiablement l'idéal du $\mathcal{D}$ -groupoïde.

Dans un premier temps, nous allons prouver que le lieu des zéros de E est une relation d'équivalence analytique sur $\Delta - \{0\}$. Les inclusions (i) de la définition 1.2.2 donnent la réflexivité et la symétrie, c'est-à-dire $E(x, x) = 0$ et on a l'existence d'une unité u telle que $E(x, y) = uE(y, x)$. Considérons l'idéal $\mathcal{I}_0$ engendré par $E(x, y)$ et $E(x, z)$ dans $J_0(\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta)$ et $\mathcal{I}$ le système différentiel qu'il engendre sur

20 Chapitre 2. $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un germe de disque de $\mathbb{C}$

$J(\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta)$. En dehors du lieu d'annulation des différentielles verticales $\frac{\partial E}{\partial y} dy$ et $\frac{\partial E}{\partial z} dz$ qui se trouve au-dessus de $x = 0$, le théorème des fonctions implicites implique que les seules équations d'ordre zéro de $\mathcal{I}$ sont celles de $\mathcal{I}_0$. L'inclusion de transitivité (ii) pour le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie donne que $E(x, y)$ appartient à $\mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_0(\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta)}$ donc à $\mathcal{I}_0$. Ceci nous donne la transitivité de la relation d'équivalence donnée par E .

Le lemme précédent affirme que $E(0, y) \neq 0$; on peut utiliser le théorème de préparation de Weierstrass et supposer, quitte à réduire Δ , que

$$E(x, y) = y^k + a_{k-1}(x)y^{k-1} + \dots + a_0(x).$$

Pour x, y et z dans $\Delta - \{0\}$ la propriété de transitivité s'écrit

$$E(x, y) = \alpha(x, y, z)E(x, z) + \beta(x, y, z)E(z, y).$$

Si on fixe deux points x et z équivalents, on obtient l'égalité

$$E(x, y) = \beta(x, y, z)E(z, y).$$

En échangeant x et z on obtient que $\beta(x, y, z)$ est une unité. Les deux polynômes en y , $E(x, y)$ et $E(z, y)$, étant unitaires, cette égalité s'écrit $E(x, y) = E(z, y)$ d'où $a_0(x) = a_0(z)$. Les zéros de $E(x, y)$ sont inclus dans les zéros de $a_0(x) - a_0(y)$. Par symétrie, il existe une unité $u(x, y)$ telle que

$$E(x, 0) = u(x, 0)E(0, x)$$

donc $a_0(x) = u(x, 0)x^k$ et l'équation $a_0(x) - a_0(y)$ n'est pas identiquement nulle. Les zéros de $E(x, y)$ sont donc égaux aux zéros de $a_0(x) - a_0(y)$. Les idéaux étant réduits, $a_0(x) - a_0(y)$ engendre les équations d'ordre 0 du groupoïde. $\square$

Remarque 2.1.6 *La preuve présentée ici du troisième point est assez lourde. B. Malgrange a remarqué que dans le cas d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif de rang fini, le groupe de Galois linéaire du système d'équation linéaire décrivant l'algèbre de Lie de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est contrôlé par le groupe d'isotropie d'un point. Dans le cas ci-dessus, ceci donne que le groupe de Galois de l'algèbre de Lie est fini, ce qui n'arrive que lorsque ν a un pôle simple de résidu rationnel.*

Remarque 2.1.7 *L'intégration des $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie de rang 2 et 3 ne nécessite pas la diminution du polydisque Δ . L'intégration des $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie de rang 0 et 1 ne se fait a priori que sur des polydisques plus petits.*

Remarque 2.1.8 *Si on choisit sur $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$ une primitive Schwartzienne V de ν ($S(V) = \nu$), les solutions φ de $\mathcal{G}_3(\nu)$ vérifient*

$$S(V \circ \varphi) = S(V).$$

1. L'application V semi-conjugué le groupoïde des solutions de $\mathcal{G}_3(\nu)$ au groupoïde des homographies au-dessus de l'image de V .
2. On peut interpréter $\mathcal{G}_3(\nu)$ comme le groupoïde d'invariance d'une dérivée Schwartzienne ou le groupoïde des isométries d'une structure projective méromorphe. Une dérivée Schwartzienne est une section méromorphe d'un fibré $GL_1^{(3)}$ équivariant sur Δ . Ce fibré se construit à partir du fibré des 3-repères R^3 de groupe structural $GL_1^{(3)}$ et de $\mathbb{C}$ muni de l'action de $GL_1^{(3)}$ suivante : soit $g = (0, 0, g_1, g_2, g_3) \in GL_1^{(3)}$,

$$g^{-1} \cdot z = z(g_1)^2 + 2\frac{g_3}{g_1} - 3\left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2.$$

Soit ν une section méromorphe de $R^3 \times_{D^3} \mathbb{C}$. Le groupoïde d'isométries de ν est défini par l'équation $\varphi^*\nu = \nu$ qui est exactement l'équation de $\mathcal{G}_3(\nu)$.

2.2 $\mathcal{D}$ -enveloppe d'un germe de difféomorphisme

Dans cette partie, nous allons déterminer les germes de difféomorphismes $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ qui sont solutions de $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de rang fini. Le champ de vecteurs holomorphe $a(x)\frac{d}{dx}$ est solution des $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie suivantes :

- $\mathcal{A}_1(\frac{a'}{a})$,
- $\mathcal{A}_2(\mu)$ avec μ solution méromorphe de $a'' + \mu a' + \mu' a = 0$,
- $\mathcal{A}_3(\nu)$ avec ν solution méromorphe de $a''' + \nu a' + \frac{\nu'}{2}a = 0$.

Ceci a pour conséquence qu'un germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$ donné par le flot d'un champ de vecteurs holomorphe $a(x)\frac{d}{dx}$ est solution des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie suivants :

- $\mathcal{G}_1(-\frac{a'}{a})$
- $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec $\mu = \frac{c-a'}{a}$ c étant un nombre complexe,
- $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec $\nu = \frac{-c^2 - 2a'a'' + a'^2}{a^2}$.

Un germe de difféomorphisme tangent à l'identité f étant toujours formellement conjugué au flot d'un champ de vecteurs ([M-R2]), il satisfait des équations formelles de la forme :

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma} \circ f(f')^k, \widehat{\mu} = \widehat{\mu} \circ f f' + \frac{f''}{f'}, \text{ et } \widehat{\nu} = \widehat{\nu} \circ f(f')^2 + S(f)$$

construites en prenant l'image inverse par la normalisante formelle des équations satisfaites par la forme normale. Nous allons regarder les conditions sur f pour que l'une de ces équations soit méromorphe. Ceci nous donnera l'équation d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde dont f sera une solution.

2.2.1 Premier cas, f est contractant ou dilatant : $|f'(0)| \neq 1$

Dans ce cas f est analytiquement conjugué à sa partie linéaire. Comme les similitudes laissent stable le champ $x \frac{d}{dx}$, ces difféomorphismes sont solutions d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 1, l'image inverse de $\mathcal{G}_1(\frac{-1}{x})$ par la linéarisante h , c'est-à-dire $\mathcal{G}_1(-\frac{h'}{h} + \frac{h''}{h'})$.

2.2.2 Deuxième cas, $|f'(0)| = 1$ et $f'(0)$ n'est pas une racine de l'unité

Dans ce cas, f est formellement linéarisable.

Théorème 2.2.1 ([Ma4]) *Le difféomorphisme f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang fini si et seulement si f est analytiquement linéarisable.*

Preuve. – La preuve utilise la version du théorème de Maillet due à B. Malgrange [Ma2] :

Théorème *Soient $F(x, y, y_1, \dots, y_n)$ une fonction holomorphe et $\widehat{\Phi}$ une solution formelle de $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ telle que $\frac{\partial F}{\partial y_n} \not\equiv 0$ le long de $\widehat{\Phi}$. Si le linéarisé de F le long de $\widehat{\Phi}$:*

$$\mathcal{L}_{\widehat{\Phi}} F = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}', \dots, \widehat{\Phi}^{(n)}) + \dots + \frac{\partial F}{\partial y_n}(x, \widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}', \dots, \widehat{\Phi}^{(n)}) \frac{d^n}{dx^n}$$

est à singularité régulière alors $\widehat{\Phi}$ est convergente.

D'après la remarque 2.1.2, si f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde, elle est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de rang trois. Nous supposons donc f solution de $\mathcal{G}_3(\nu)$. Sa linéarisante formelle $\widehat{\Phi}$ vérifie $\widehat{\Phi}(\lambda x) = f \circ \widehat{\Phi}$ où λ est la partie linéaire de f . Elle transforme ν en

$$\overline{\nu} = \nu \circ \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}')^2 + S_{\widehat{\Phi}}$$

qui est a priori une série formelle contenant un nombre fini de puissances négatives de x . Elle doit cependant vérifier $\overline{\nu}(x) = \overline{\nu}(\lambda x)(\lambda)^2$. Comme $\lambda^k \neq 1$, $\overline{\nu}(x) = \frac{c}{x^2}$ pour une constante c . La linéarisante est donc une solution formelle de l'équation différentielle

$$\frac{c}{x^2} = \nu \circ \widehat{\Phi}(\widehat{\Phi}')^2 + S_{\widehat{\Phi}}.$$

On applique alors le théorème ci-dessus à :

$$F(x, y, y_1, y_2, y_3) = \left(\nu(y)y_1^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \frac{c}{x^2} \right) y_1^2 x^2 y^2.$$

Son linéarisé le long de $\widehat{\Phi}$ est

$$\nu'(\widehat{\Phi})(\widehat{\Phi}')^2 + \left(2\nu(\widehat{\Phi})\widehat{\Phi}' - 2\frac{\widehat{\Phi}'''}{(\widehat{\Phi}')^2} + 6\frac{(\widehat{\Phi}'')^2}{(\widehat{\Phi}')^3} \right) \frac{d}{dx} - \left(6\frac{\widehat{\Phi}''}{(\widehat{\Phi}')^2} \right) \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{\widehat{\Phi}'} \frac{d^3}{dx^3}.$$

Comme ν a un pôle d'ordre 2 en 0 et $\widehat{\Phi}$ s'annule une fois en 0, le linéarisé de notre équation le long de la solution formelle est à singularité régulière. $\square$

2.2.3 Troisième cas, f est un difféomorphisme parabolique : $f'(0) = 1$

Nous utiliserons les notations et les résultats de [M-R2] (voir aussi [Ra]) ainsi que les résultats de Écalle, Voronin et Malgrange ([Ec, Ma1]). Nous noterons $a_{k,\lambda}(x) = 2i\pi \frac{x^{k+1}}{1+\lambda x^k}$ et $X_{k,\lambda} = a_{k,\lambda} \frac{d}{dx}$. Les germes de difféomorphismes $g_{k,\lambda} = \exp(X_{k,\lambda})$ sont les formes normales formelles des germes de difféomorphismes paraboliques. Ils admettent pour intégrales premières $H_{k,\lambda}(x) = x^{-\lambda} e^{1/kx^k}$. Pour tout $f(z) = z + cz^{k+1} + \dots$, il existe un champ formel $\widehat{X} = cz^{k+1} + \dots \frac{d}{dx}$ tel que $f = \exp \widehat{X}$ et un difféomorphisme formel $\widehat{h}$ qui conjugue $\widehat{X}$ à $X_{k,\lambda}$ (donc f à $g_{k,\lambda}$). Un théorème d'Écalle-Martinet-Ramis dit que $\widehat{h}$ est k -sommable de somme (U_i, h_i) sur $2k$ secteurs U_i . On note $\text{inv}(f) = (h_i(U_i) \cap h_{i+1}(U_{i+1}), h_{i+1} \circ h_i^{-1})$ les invariants analytiques d'Écalle-Voronin définis à automorphisme près sur le disque du modèle formel et $s(f) = (U_i \cap U_{i+1}, h_{i+1}^{-1} \circ h_i)$ leurs analogues sur Δ .

Lemme 2.2.2 *Soit f un difféomorphisme parabolique et $\widehat{X}$ le champ formel tel que $f = \exp(\widehat{X})$. Le difféomorphisme f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde si et seulement si $\widehat{X}$ est solution de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie.*

Preuve. – Nous ne traiterons que le cas où f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie de rang trois. Le cas où le $\mathcal{D}$ -groupeïde est de rang deux ou un se traiterait de la même manière.

Soit $\mathcal{G}_3(\nu)$ le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie dont f est solution. Le groupe à un paramètre $\widehat{f}^{\text{ot}} = \exp t\widehat{X} = \sum_{n \geq 0} a_n(t)x^n$ définit des séries formelles convergentes au moins pour t entier, les a_n étant des polynômes en t . L'expression :

$$\nu - \nu \circ \widehat{f}^{\text{ot}}(\widehat{f}^{\text{ot}})^{\prime 2} - S(\widehat{f}^{\text{ot}})$$

avec ν méromorphe, nous donne une série formelle $\sum_{n \geq \deg(\nu)} b_n(t)x^n$ où les b_n sont des polynômes en t . Le difféomorphisme f et ses itérés vérifiant l'équation, les b_n s'annulent sur $\mathbb{Z}$ et sont donc identiquement nuls. Les séries $\widehat{f}^{\text{ot}}$ forment donc une famille à un paramètre de solutions formelles de $\mathcal{G}_3(\nu)$. En linéarisant

$$\nu - \nu \circ \widehat{f}^{\text{ot}}(\widehat{f}^{\text{ot}})^{\prime 2} - S(\widehat{f}^{\text{ot}}) \equiv 0$$

en $t = 0$, on trouve que le champ $\widehat{X}$ satisfait l'équation de $\mathcal{A}_3(\nu)$.

Réciproquement, supposons que le champ formel $\widehat{X}$ soit solution. Par des arguments standard de la théorie de la sommabilité des solutions d'équations différentielles linéaires (voir [Ra]), le polygone de Newton de l'équation de $\mathcal{A}_3(\nu)$ n'ayant qu'une pente, le champ est k -sommable pour un certain k . Ses sommes seront aussi solutions de $\mathcal{A}_3(\nu)$. Restreint sur chaque secteur de sommation, on a un groupoïde sans singularité. Dans ce cas l'exponentielle d'un champ solution de l'algèbre est solution du groupoïde [Mck]. Ceci étant valable sur tous les secteurs, l'exponentielle du champ est solution du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie. $\square$

Proposition 2.2.3

1. Si f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie, $s(f)$ est solution du même $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie.
2. Soit f de forme normale $g_{k,\lambda}$ et d'invariant analytique $\text{inv}(f)$. Le difféomorphisme f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang r si et seulement si il existe un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang r admettant $g_{k,\lambda}$ et $\text{inv}(f)$ comme solutions.

Preuve. – Nous regarderons dans un premier temps le cas où f est solution d'un groupoïde de rang trois.

Commençons par le deuxième point. Soient f un difféomorphisme tangent à l'identité solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde $\mathcal{G}_3(\nu)$ et $\widehat{h}$ sa normalisante de k -somme (U_i, h_i) . Les sommes sectorielles nous permettent de construire des groupoïdes $\mathcal{G}_3(\overline{\nu}_i)$ sur $h_i(U_i)$ tels que $X_{k,\lambda}$ soit solution de leurs $\mathcal{D}$ -algèbres de Lie. Les $\overline{\nu}_i$ provenant tous du même ν par des transformations h_i ayant même développement asymptotique en 0, ils ont le même développement asymptotique en 0. De plus il est facile de déterminer précisément la forme de ces fonctions. Comme pour tout $\overline{\nu}_i$ le champ de vecteurs $a_{k,\lambda} \frac{d}{dx}$ est solution de $\mathcal{A}_3(\overline{\nu}_i)$, les $\overline{\nu}_i$ sont tous solutions de l'équation différentielle linéaire

$$a_{k,\lambda}''' + \overline{\nu}_i a_{k,\lambda}' + \frac{\overline{\nu}_i'}{2} a_{k,\lambda} = 0.$$

On en déduit qu'il existe des constantes c_i telles que

$$\overline{\nu}_i = \frac{-c_i^2 + a_{k,\lambda}'^2 - 2a_{k,\lambda}'' a_{k,\lambda}}{a_{k,\lambda}^2}.$$

Pour que leur développements asymptotiques soient les mêmes, il faut que les constantes soient égales. Les $\overline{\nu}_i$ sont donc égaux et définissent une fonction méromorphe $\overline{\nu}$ sur la réunion des $h_i(U_i)$. Par construction, $g_{k,\lambda}$ est solution de $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$ et les invariants analytiques de f laissent invariant $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$, ils sont donc aussi solutions de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie.

Réciproquement, supposons que $g_{k,\lambda}$ et $\text{inv}(f)$ soient solutions d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde

$\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$. Nous allons utiliser le premier point de la remarque 2.1.8 pour décrire $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$ comme groupoïde d'invariance de la dérivée schwartzienne d'une fonction $\bar{V}$. Puis nous tirerons en arrière cette fonction par chaque normalisante sectorielles. Sur chaque ouvert sectoriel $h_i(U_i)$ on peut choisir une primitive Schwartzienne de $\bar{\nu} : \bar{V}_i (S(\bar{V}_i) = \bar{\nu})$ telles que $\bar{V}_i = \bar{V}_{i+1}$ pour $i \in \{1, \dots, k-1\}$ et $\bar{V}_1 = \gamma \circ \bar{V}_k$ où γ est une homographie. Comme $h_{i+1} \circ h_i^{-1}$ est solution de $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$,

$$\bar{V}_{i+1} \circ h_{i+1} \circ h_i^{-1} = \alpha_i \circ \bar{V}_{i+1}$$

pour une homographie α_i . On note V_i la fonction définie sur U_i par $\bar{V}_i \circ h_i$. Si $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $V_{i+1} = \alpha_i \circ V_i$ et $V_1 = \alpha_k \circ \gamma \circ V_k$. Sur chaque secteur U_i , le pull-back par h_i du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$ est $\mathcal{G}_3(\nu_i)$ avec $\nu_i = S(V_i)$. On obtient ainsi un groupoïde de paramètre uniforme ν à croissance méromorphe en 0 ; d'après le théorème des singularités inexistantes de Riemann, ν est méromorphe en 0. Le difféomorphisme f étant solution sur les secteurs, il est solution de $\mathcal{G}_3(\nu)$.

Le premier point est conséquence du second. Dans la construction précédente on obtient

$$V_{i+1} \circ (h_{i+1}^{-1} \circ h_i) = V_i \text{ et } V_1 \circ (h_1^{-1} \circ h_k) = \gamma \circ V_k.$$

En prenant la dérivée Schwartzienne de ces égalités, tous les $h_{i+1}^{-1} \circ h_i$ sont solutions de $\mathcal{G}_3(\nu)$.

Le cas des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de rang deux $\mathcal{G}_2(\mu)$ se traite de la même manière. Le seul changement consiste à remplacer la primitive schwartzienne de ν par une solution de $\frac{V'''}{V'} = \mu$.

On étudie le cas des $\mathcal{D}$ -groupoïdes $\mathcal{G}_1^k(\mu)$ à partir de $\mathcal{G}_2(\mu)$ qui les contient. Le cocycle $inv(f)$ est donc composé de solutions de $\mathcal{G}_2(\bar{\mu}) = \mathcal{G}_2(\frac{c-a'_{k,\lambda}}{a_{k,\lambda}})$ asymptotes à l'identité. Comme $\bar{\mu}$ a un pôle simple, la constante c doit être nulle. Dans ce cas, la seule solution asymptote à l'identité est l'identité. $\square$

Le théorème suivant donne la liste des germes de difféomorphismes paraboliques ayant une $\mathcal{D}$ -enveloppe de rang fini. Pour cela nous utiliserons les invariants "géométriques" ($\varphi_{i,i+1}$) de Martinet-Ramis définis par $\varphi_{i,i+1} \circ (H_{k,\lambda} \circ h_{i+1}) = H_{k,\lambda} \circ h_i$. Ils sont alternativement définis au voisinage de 0 ou de l'infini sur les sphères du chapelet décrivant l'espace des orbites de f [M-R2].

Théorème 2.2.4

1. Un difféomorphisme tangent à l'identité est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 3 si et seulement si il existe un entier positif p tel que les invariants géométriques soient de la forme $\frac{\tau}{\sqrt[p]{1+a_i\tau^p}}$ en 0 et $\tau\sqrt[p]{1+\frac{b_i}{\tau^p}}$ en ∞ . De tels difféomorphismes seront appelés, d'après J. Écalle, binaires.
2. Un difféomorphisme tangent à l'identité est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 2 si et seulement si il existe un entier p tel que les invariants géomé-

triques soient ou bien de la forme $\frac{\tau}{\sqrt[p]{1+a_i\tau^p}}$ en 0 et τ en ∞ ou bien de la forme τ en 0 et $\tau\sqrt[p]{1+\frac{b_i}{\tau^p}}$ en ∞ . De tels difféomorphismes seront appelés unitaires.

Preuve. – Pour avoir la forme des invariants géométriques il faut considérer un $\mathcal{D}$ -groupoïde dont $g_{k,\lambda}$ est solution, déterminer les solutions de ce groupoïde asymptotes à l'identité et commutant à $g_{k,\lambda}$, puis les lire dans la variable $H_{k,\lambda}$.

Commençons par le premier point. Soit $\mathcal{G}_3$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont $g_{k,\lambda}$ est solution. Le champ $X_{k,\lambda}$ est solution de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_3$. Sur un secteur d'ouverture $\frac{2\pi}{k}$, $X_{k,\lambda}$ est conjugué à $X_{1,0}$ par une conjugaison qui fait correspondre à un germe sectoriel asymptote à l'identité, un germe sectoriel asymptote à l'identité et qui conjugue $H_{k,\lambda}$ à $H_{1,0}$ [M-R2]. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde $\mathcal{G}_3$ est donc conjugué sur ce secteur à un $\mathcal{D}$ -groupoïde $\tilde{\mathcal{G}}_3$ de $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\tilde{\mathcal{A}}_3$. Par construction $X_{1,0}$ est solution de $\tilde{\mathcal{A}}_3$ donc $\tilde{\mathcal{A}}_3 = \mathcal{A}_3(\frac{-\gamma}{x^4})$, pour une constante complexe γ , et $\tilde{\mathcal{G}}_3 = \mathcal{G}_3(\frac{-\gamma}{x^4})$. Les équations de $\mathcal{G}_3(\frac{-\gamma}{x^4})$ se résolvent explicitement. Un changement de variable $y = 1/x$ transforme le $\mathcal{D}$ -groupoïde en $\mathcal{G}_3(-\gamma)$ sur un voisinage de l'infini. Les solutions locales de $\mathcal{A}_3(-\gamma)$ sont engendrées par les champs $\frac{d}{dx}$, $e^{-\delta y}\frac{d}{dx}$ et $e^{\delta y}\frac{d}{dx}$ avec $\delta^2 = \gamma$. Ces champs se réécrivent $e^{\delta y}\frac{d}{d(e^{\delta y})}$, $\frac{d}{d(e^{\delta y})}$, et $e^{2\delta y}\frac{d}{d(e^{\delta y})}$. Ceci signifie que les solutions de $\mathcal{G}_3(-\gamma)$ sont les homographies en la variable $e^{\delta y}$:

$$y \mapsto \frac{1}{\delta} \log \left(\frac{ae^{\delta y} + b}{ce^{\delta y} + d} \right)$$

pour n'importe quelle détermination du logarithme. Les solutions asymptotes à l'identité sont de la forme :

$$\begin{aligned} y &\mapsto y + \frac{1}{\delta} \log(1 + be^{-\delta y}) \text{ sur les secteurs } \Re(\delta y) > 0 \\ y &\mapsto y - \frac{1}{\delta} \log(1 + ae^{\delta y}) \text{ sur les secteurs } \Re(\delta y) < 0 \end{aligned}$$

pour la détermination du logarithme qui vaut 0 en 1. Pour qu'ils commutent à $g_{1,0}$ il faut que δ soit entier. En lisant ces éléments dans la variable $H_{1,0} = e^y$ on obtient la forme cherchée pour les invariants géométriques.

On prouve le deuxième point de la même manière. Soit $\mathcal{G}_2$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde dont $g_{k,\lambda}$ est solution. Pour les mêmes raisons que précédemment, déterminer les solutions asymptotes à l'identité de $\mathcal{G}_2$ revient à déterminer les solutions asymptotes à l'identité d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang deux tel que $X_{1,0}$ soit solution de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. Ces $\mathcal{D}$ -groupoïdes sont $\mathcal{G}_2(\frac{\gamma-2x}{x^2})$. Ici encore, les équations de ces $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie se résolvent. En faisant le changement de variable $y = \frac{1}{x}$, on transforme $\mathcal{G}_2(\frac{\gamma-2x}{x^2})$ en $\mathcal{G}_2(-\gamma)$ sur un voisinage de l'infini. Les solutions de $\mathcal{A}_2(-\gamma)$ sont engendrées par les champs de vecteurs $\frac{d}{dy}$ et $e^{\gamma y}\frac{d}{dy}$ qui se réécrivent $e^{-\gamma y}\frac{d}{d(e^{-\gamma y})}$ et $\frac{d}{d(e^{-\gamma y})}$. Les solutions de $\mathcal{G}_2(-\gamma)$ sont les applications affines en la variable $e^{-\gamma y}$ c'est-à-dire,

$$y \mapsto \frac{-1}{\gamma} \log (ae^{-\gamma y} + b)$$

pour n'importe quelle détermination du logarithme. Les éléments asymptotes à l'identité sont :

$$y \mapsto y - \frac{1}{\gamma} \log(1 + be^{\gamma y})$$

sur le secteur $\Re(\gamma y) < 0$. Pour qu'une telle application commute à $g_{1,0}$ il faut que γ soit entier. Suivant le signe de γ on sera dans l'une des deux situations suivantes.

Le signe de γ est négatif. Le $\mathcal{D}$ -groupeïde $\mathcal{G}_2$ n'admet de solution asymptote à l'identité que sur les secteurs $\Re(x^k) > 0$, qui correspondent aux secteurs où l'intégrale première devient infinie. Les recollements des sphères se font donc par l'identité pour les recollements en 0 et par un germe de difféomorphisme de la forme cherchée pour les recollements en l'infini.

Le signe de γ est positif. Le $\mathcal{D}$ -groupeïde n'admet de solution asymptote à l'identité que sur les secteurs $\Re(x^k) < 0$ où l'intégrale première tend vers zéro. La situation est donc inversée. Les recollements des sphères se font donc par l'identité pour les recollements en l'infini et par un germe de difféomorphisme de la forme cherchée pour les recollements en 0. $\square$

2.2.4 Quatrième cas, le difféomorphisme est résonnant :

$$f'(0)^k = 1$$

Si $f(x) = e^{2i\pi p/q}x + \dots$ est un difféomorphisme résonnant alors $f^{\circ q}$ sera tangent à l'identité. Deux cas sont à regarder.

Le premier est celui des difféomorphismes périodiques de période k . Ces germes sont analytiquement linéarisables par $h = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\lambda^i} f^{\circ i}$ où λ est la partie linéaire de f . Sa $\mathcal{D}$ -enveloppe est donc de rang nul et est donnée dans la coordonnée linéarisante x par l'équation $x^k - y^k = 0$.

Le deuxième cas, celui des difféomorphismes résonnants non périodiques, est traité par la proposition suivante.

Proposition 2.2.5 *f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie si et seulement si $f^{\circ q}$ est solution du même $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie.*

Preuve. – Supposons que $f^{\circ q}$ est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. Lorsque nous normalisons sectoriellement $f^{\circ q}$, ses racines sont envoyées sur les racines de la forme normale : $e^{2i\pi p/q} \exp(\frac{1}{q} \frac{x^{q+1}}{1-\lambda x^q} \frac{d}{dx})$. Ces dernières sont solutions des $\mathcal{D}$ -groupeïdes contenant la forme normale. Cela signifie que f est solution sur tous les secteurs, donc en 0, du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie. L'autre sens est évident. $\square$

2.3 Classe de conjugaison analytique d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie

Nous rappelons que si ϕ est un difféomorphisme de $(\Delta, 0)$ dans $(\Delta, 0)$ alors ϕ conjugue :

- $\mathcal{G}_1^k(\mu)$ à $\mathcal{G}_1^k(\mu \circ \phi\phi' + \frac{\phi''}{\phi'})$
- $\mathcal{G}_2(\mu)$ à $\mathcal{G}_2(\mu \circ \phi\phi' + \frac{\phi''}{\phi'})$
- $\mathcal{G}_3(\nu)$ à $\mathcal{G}_3(\nu \circ \phi(\phi')^2 + S(\phi))$.

Définition 2.3.1 Nous dirons d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie qu'il est *singulier-régulier* (resp. *singulier-irrégulier*) lorsque l'équation de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie est à singularité régulière (resp. irrégulière).

Un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang un est toujours singulier-régulier, $\mathcal{G}_2(\mu)$ est singulier-régulier si et seulement si $\mu(x) = \frac{h(x)}{x}$ avec h holomorphe et $\mathcal{G}_3(\nu)$ est singulier-régulier si et seulement si $\nu(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ avec h holomorphe. Les conjugaisons seront, sauf mentions contraires, réalisées par des difféomorphismes tangents à l'identité.

2.3.1 $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie singuliers-réguliers

Théorème 2.3.2

1. Soit $\mathcal{G}_1(\frac{h(x)}{x})$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 1,
 - si $h(0) \notin \mathbb{Z}_{\leq -2}$ alors le groupoïde est conjugué par un difféomorphisme tangent à l'identité à $\mathcal{G}_1(\frac{h(0)}{x})$
 - si $h(0) \in \mathbb{Z}_{\leq -2}$ alors le groupoïde est conjugué par un difféomorphisme tangent à l'identité à $\mathcal{G}_1(\frac{h(0)}{x} + \frac{\lambda(h(0)+1)x^{-h(0)-2}}{1-\lambda x^{-h(0)-1}})$ pour un nombre complexe λ .
2. Soit $\mathcal{G}_2(\frac{h(x)}{x})$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 2,
 - si $h(0) \notin \mathbb{Z}_{\leq -2}$ alors le groupoïde est conjugué par un difféomorphisme tangent à l'identité à $\mathcal{G}_2(\frac{h(0)}{x})$
 - si $h(0) \in \mathbb{Z}_{\leq -2}$ alors le groupoïde est conjugué par un difféomorphisme tangent à l'identité à $\mathcal{G}_2(\frac{h(0)}{x} + \frac{\lambda(h(0)+1)x^{-h(0)-2}}{1-\lambda x^{-h(0)-1}})$ pour un nombre complexe λ .
3. Soit $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^2})$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang 3,
 - si $1 - \sqrt{1+h(0)} \notin \mathbb{Z}_{\geq 2}$ alors le groupoïde est conjugué par un difféomorphisme tangent à l'identité à $\mathcal{G}_1(\frac{h(0)}{x^2})$
 - si $1 - \sqrt{1+h(0)} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ alors le groupoïde est conjugué par un difféomorphisme tangent à l'identité à $\mathcal{G}_3(\frac{h(0)}{x^2} + \frac{\lambda(h(0)-1)x\sqrt{1-h(0)}-2}{1-\lambda x\sqrt{1-h(0)}} + 3\frac{\lambda(h(0)-1)x\sqrt{1-h(0)}-2}{(1-\lambda x\sqrt{1-h(0)})^2})$ pour un nombre complexe λ .

Preuve. – Traitons d'abord le premier cas. La $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_1(\frac{h(x)}{x})$ a une solution de la forme $x^{-h(0)}\Phi\frac{d}{dx}$ avec $\Phi(0) = 1$. Ce champ est conjugué à $x^{-h(0)}\frac{d}{dx}$ si $h(0) \notin \{-2, -3, \dots\}$ et à $\frac{x^{-h(0)}}{1-\lambda x^{-h(0)-1}}\frac{d}{dx}$ sinon. La conjugante conjugue les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie $\mathcal{G}_1^k(\frac{h(x)}{x})$ à l'une des deux formes indiquées suivant le cas dans lequel on se trouve.

Le deuxième cas se ramène au premier en normalisant la sous- $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_1(\mu)$ de $\mathcal{A}_2(\mu)$.

Dans le troisième cas on cherche une sous- $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang deux de $\mathcal{A}_3(\nu)$. Pour cela il faut résoudre $2\mu' - \mu^2 = \nu$ c'est-à-dire $4y'' + \nu y = 0$ avec $\mu = -2\frac{y'}{y}$. On trouve une solution $y = x^{(1/2-1/2\sqrt{1+h(0)})}\Phi$ avec Φ une unité. D'où

$$\mu = \frac{\sqrt{1+h(0)} - 1}{x} + \frac{\Phi'}{\Phi}.$$

La normalisante de cette $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie conjugue $\mathcal{A}_3(\nu)$ à la seule $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang trois contenant la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de rang deux normalisée. Suivant les cas, elle est donnée par l'une des deux formes de l'énoncé. $\square$

Remarque 2.3.3 *Si on ne s'autorise que des conjuguantes tangentes à l'identité, les classes décrites au-dessus sont toutes différentes. Si on s'autorise des conjugaisons par des similitudes, le nombre λ peut dans tous les cas être ramené à 1.*

2.3.2 $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie singuliers-irréguliers

Nous allons regarder les $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie $\mathcal{G}_2(\frac{h(x)}{x^{k+1}})$ et $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^{k+2}})$. Par une recherche directe des solutions formelles en 0 de leur $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie, nous obtenons que $\mathcal{A}_2(\frac{h(x)}{x^{k+1}})$ et $\mathcal{A}_3(\frac{h(x)}{x^{k+2}})$ ont un champ formel solution de la forme $x^{k+1}\widehat{\Phi}\frac{d}{dx}$ où $\widehat{\Phi}$ est une unité et que $\mathcal{A}_3(\frac{h(x)}{x^{k+1}})$ a une solution formelle $x^{k+1/2}\widehat{\Phi}\frac{d}{dx}$. Comme nous l'avons rappelé les champs de vecteurs formels se normalisent formellement sur des champs simples $\frac{x^{k+1}}{1-\lambda x^k}\frac{d}{dx}$. L'unique champ formel solution de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie et le coefficient $h(0)$ déterminent complètement le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie initial grâce aux formules données au début de la partie 4.4. En normalisant formellement ces champs nous obtenons la proposition 2.3.4. Puis en étudiant cette normalisante suivant la démarche de [M-R2], nous donnerons un système complet d'invariants de la classe de conjugaison d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie dans une classe formelle fixée. (théorème 2.3.6)

Proposition 2.3.4

1. $\mathcal{G}_2(\frac{h(x)}{x^{k+1}})$ est formellement conjugué à

$$\mathcal{G}_2\left(\frac{h(0)}{x^{k+1}} - \frac{\lambda h(0)}{x} - \frac{k+1}{x} + \frac{\lambda k x^{k-1}}{1-\lambda x^k}\right) \text{ noté } \mathcal{G}_2(k+1, \lambda, h(0))$$

où λ est le résidu du champ formel solution en 0 de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie.

2. $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^{2k+2}})$ est formellement conjugué à

$$\mathcal{G}_3\left(\frac{h(0)}{x^{2k+2}} - \frac{2h(0)\lambda}{x^{k+2}} + \frac{h(0)\lambda^2 + k^2 - 1}{x^2} - \frac{\lambda k^2 x^{k-2}}{1-\lambda x^k} - 3\frac{\lambda k^2 x^{k-2}}{(1-\lambda x^k)^2}\right)$$

noté $\mathcal{G}_3(2k+2, \lambda, h(0))$.

3. $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^{2k+1}})$ est formellement conjugué à

$$\mathcal{G}_3\left(\frac{h(0)}{x^{2k+1}} - \frac{k^2 - k - 3/4}{x^2}\right) \text{ noté } \mathcal{G}_3(2k+1, 0, h(0)).$$

Corollaire 2.3.5 Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie singuliers-irréguliers $\mathcal{G}_2(\frac{h(x)}{x^{k+1}})$ et $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^{2k+2}})$ contiennent un germe de difféomorphisme holomorphe en 0.

Preuve du corollaire 2.3.5. – Commençons par le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang trois.

Soit $\hat{X} = (2i\pi x^{k+1} + \dots) \frac{d}{dx}$ le champ formel solution en 0 de $\mathcal{A}_3(\frac{h(x)}{x^{2k+2}})$ et $\hat{N}$ sa normalisante formelle ($\hat{X} = \hat{N}^* X_{k,\lambda}$) de sommes sectorielles $(N_i)_i$. Elles conjuguent $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^{2k+2}})$ à $\mathcal{G}_3(2k+2, \lambda, h(0))$. Pour que $\exp(\hat{X})$ converge il faut et il suffit, d'après [M-R2], que $N_{i+1} \circ N_i^{-1}$ commutent à $\exp(\hat{X})$ (*). Nous allons chercher dans la droite engendrée par $\hat{X}$ un champ vérifiant cette condition (*).

Le champ $c\hat{X}$ est envoyé par $\hat{N}$ sur $cX_{k,\lambda}$. La forme normale de $c\hat{X}$ est $X_{k,\lambda/c}$ et sa normalisante est $c^{1/k}\hat{N}$. L'image de $\mathcal{G}_3(\frac{h(x)}{x^{2k+2}})$ par $c^{1/k}\hat{N}$ est le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie contient le champ $X_{k,\lambda/c}$. Il est de la forme $\mathcal{G}_3(2k+2, \lambda/c, \gamma)$. En calculant le coefficient $\frac{1}{x^{2k+2}}$ on trouve $\gamma = h(0)c^2$. Le cocycle défini par cette normalisante est donc une solution de $\mathcal{G}_3(2k+2, \lambda/c, h(0)c^2)$. Nous allons regarder les solutions de ce groupoïde sur le secteur de définition d'une composante du cocycle. On utilise successivement l'application $x \mapsto kx^k$ qui envoie $X_{k,\lambda/c}$ sur $X_{1,\lambda/c^k}$ et $\mathcal{G}_3(2k+2, \lambda/c, h(0)c^2)$ sur $\mathcal{G}_3(4, \lambda/c^k, h(0)c^2)$ puis l'application $x \mapsto \frac{x}{1+\lambda/c^k x \log x}$ qui envoie $X_{1,\lambda/c^k}$ sur $X_{1,0}$ et $\mathcal{G}_3(4, \lambda/c^k, h(0)c^2)$ sur $\mathcal{G}_3(4, 0, h(0)c^2)$ et enfin l'application $y = \frac{1}{x}$ envoie $X_{1,0}$ sur $2i\pi \frac{d}{dy}$ et $\mathcal{G}_3(4, 0, h(0)c^2)$ sur $\mathcal{G}_3(-1, 0, h(0)c^2)$. L'image de $N_{i+1} \circ N_i^{-1}$ par cette suite de conjugaisons sectorielles est donc une solution du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}_3(-1, 0, h(0)c^2)$. Ses solutions sont les homographies en $e^{\sqrt{h(0)}y}$. La condition (*) se traduit par le fait de commuter à la translation par $2i\pi$. Le fait d'avoir un développement asymptotique égal à l'identité donne alors $\sqrt{h(0)}c \in \mathbb{Z}$. Le champ $\frac{\hat{X}}{\sqrt{h(0)}}$ convient.

Le cas du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang deux se traite de la même manière. Les conjugués des $N_{i+1} \circ N_i^{-1}$ sont dans ce cas des solutions de $\mathcal{G}_2(-1, 0, h(0)c)$ et sont donc des applications affines en la variable $e^{-ch(0)}$ infiniment tangente à l'identité. Pour satisfaire la condition (*), il suffit de prendre $c = \frac{1}{h(0)}$. $\square$

La classification analytique des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie singuliers-irréguliers de rang deux ou de rang trois à pôle d'ordre pair est donc exactement celle du germe de difféomorphisme donné par le premier temps de convergence de l'exponentielle du champ formel solution de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. Pour étudier les groupoïdes de rang 3 à pôle d'ordre impair, nous nous ramènerons au cas d'un groupoïde à pôle pair par le revêtement double $x \mapsto x^2$.

Nous noterons $\mathbf{G}$ le faisceau des germes sectoriels de difféomorphismes tangents à l'identité et $\mathbf{G}^\infty$ le sous-faisceau des germes infiniment tangents à l'identité. Soit $\mathcal{G}$ un groupeïde modèle de la proposition 2.3.4, nous noterons $\mathbf{G}^\infty(\mathcal{G})$ le faisceau sur $\mathbb{S}^1$ des solutions de $\mathcal{G}$ asymptotes à l'identité et commutant avec le premier temps convergent de l'exponentielle du champ formel de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. Pour tout arc de cercle α , $\mathbf{G}^\infty(\mathcal{G})(\alpha)$ est constitué des solutions de $\mathcal{G}$ définies sur un germe de secteur d'ouverture α , admettant un développement asymptotique égal à l'identité et commutant à $\exp \hat{X}$ où $\hat{X}$ est la solution formelle du linéarisé de la forme $\left(\frac{2i\pi}{h(0)} x^{k+1} + \dots \right) \frac{d}{dx}$.

Nous noterons $Z^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}))$ l'ensemble des 1-cochaînes du faisceau calculées sur un bon recouvrement de $\mathbb{S}^1$ (c'est-à-dire un recouvrement par des ouverts qui ne s'intersectent que deux à deux).

Nous utiliserons le théorème suivant.

Théorème (Malgrange) *L'application $\partial : C^0(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}) \rightarrow Z^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty)$ est surjective.*

Théorème 2.3.6

1. Soit $\mathcal{G}_2$ un groupeïde modèle de rang 2. L'ensemble des classes de conjugaison analytique contenues dans la classe de conjugaison formelle de $\mathcal{G}_2$ est en correspondance biunivoque avec $Z^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}_2))$.
2. Soit $\mathcal{G}_3$ un groupeïde modèle de rang 3. L'ensemble des classes de conjugaison analytique contenues dans la classe de conjugaison formelle de $\mathcal{G}_3$ est en correspondance biunivoque avec $Z^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}_3))$.

Preuve. – Soit $\mathcal{G}_2(\mu)$ formellement conjugué à $\mathcal{G}_2$. Sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie $\mathcal{A}_2(\mu)$ contient un champ formel. La normalisante formelle de ce champ $\hat{N}_1$ est sommable, de somme $(N_i)_i$ sur un bon recouvrement de $\mathbb{S}^1$ par des secteurs. Elle définit un cocycle : le cobord de (N_i^{-1}) qui est dans $Z^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}_2))$ d'après la proposition 2.2.3. Si un autre groupeïde de normalisante $\hat{N}_2$ définit le même cocycle, cela signifie que $\hat{N}_1^{-1} \circ \hat{N}_2$ est convergente et conjugue les deux groupeïdes. Étant donné un cocycle, le théorème de Malgrange ci-dessus et la proposition 2.2.3 dit que c'est le cocycle d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie formellement conjugué à $\mathcal{G}_2$.

Le cas des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie de rang 3 et de pôle d'ordre pair se traite exactement de la même manière.

La preuve dans le cas des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie de rang 3 et de pôle d'ordre impair se fait sur le revêtement double de la même manière. Mais il faut vérifier que la conjugante construit sur le revêtement double se projette. Soient $\mathcal{G}_3$ un groupeïde modèle de rang trois et de pôle impair et $\mathcal{G}_3^{(2)}$ son relevé au revêtement double. Nous noterons $Z^1\left(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}_3^{(2)})\right)^S$ l'ensemble des 1-cocycles du faisceau définis sur un recouvrement symétrique pour le demi-tour et constitués de germes sectoriels symétriques ; ce sont les relevés des cocycles de $\mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}_3)$. Le champ relevé du champ

solution de l'algèbre $\mathcal{A}_3$ de $\mathcal{G}_3$ est $x^{2k} \frac{d}{dx}$. Il faut s'assurer qu'un cocycle symétrique est réalisable comme bord d'une 0-chaîne symétrique afin de pouvoir projeter celle-ci et récupérer un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie en bas.

Si la 0-cochaîne $(N_i(x))$ a un cobord dans $Z^1(\mathbb{S}^1, \mathbf{G}^\infty(\mathcal{G}_3^{(2)}))^S$ on peut l'utiliser pour construire un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie conjugué sectoriellement au $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie modèle. On peut aussi utiliser la 0-cochaîne $(M_i(x) = -N_i(-x))$. Les pull-back du champ formel $x^{2k} \frac{d}{dx}$ par $\widehat{N}(x)$ et par $\widehat{M}(x) = -\widehat{N}(-x)$ sont les mêmes champs à cause de la parité de son coefficient. Par unicité de la normalisante formelle tangente à l'identité, on en déduit qu'elle est impaire. Par unicité des sommes de la série formelle, celles-ci doivent être symétriques. $\square$

2.4 Un calcul explicite de la $\mathcal{D}$ -enveloppe d'un difféomorphisme

Franck Loray a remarqué que des équations similaires à celles des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie sur Δ avait déjà été trouvées par J. Écalle dans *Les fonctions résurgentes* Tome 2 pp 472-490. Les résultats de J. Écalle permettent de calculer un élément privilégié de la classe de conjugaison d'un difféomorphisme donné puis de trouver pour les cas décrits au théorème 2.2.4 l'équation du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont il est solution. Le représentant de J. Écalle de la classe de conjugaison est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de paramètre rationnel. Malheureusement nous ne savons refaire les calculs que dans le cas d'un difféomorphisme unitaire, de résidu nul, c'est-à-dire formellement conjugué à $g_{k,0}$

Nous allons travailler dans la variable $y = \frac{1}{x}$ et noterons z la variable du plan de Borel. Soit f un germe de difféomorphisme de forme normale $g_{k,0}$. Nous pouvons supposer que f s'écrit $y(1 - \frac{2i\pi}{y^k} + \frac{c}{y^{2k}} + \dots)$. Nous allons regarder f dans la variable $ky^{1/k}$, la normalisante formelle donne alors une série formelle f^* en $y^{1/k}$ appelée itérateur de f qui vérifie

$$f^* \circ f = f^* - 2i\pi \text{ et } f^* = y + \widehat{F}.$$

Dans le cas des difféomorphismes unitaires et binaires, la théorie des fonctions résurgentes permet de calculer explicitement l'itérateur d'un germe de difféomorphisme "canonique" dans la même classe analytique que f . Nous pourrions, grâce à la proposition 2.2.3, calculer l'équation de la $\mathcal{D}$ -enveloppe du germe canonique. Ces difféomorphismes canoniques ont la propriété que leurs $\mathcal{D}$ -enveloppes sont des groupoïdes $\mathcal{G}_3(\nu)$ ou $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec ν et μ rationnelles (propositions 13e1 p475 et 13f6 p490 des *fonctions résurgentes* Tome 2).

Nous allons regarder $\widehat{F}$ dans le plan de Borel. Nous commencerons par rappeler quelques formules (voire [Lo]). Les objets en gras sont les versions sur le plan de Borel des objets du plan complexe. La transformée de Borel d'une série formelle

$\widehat{G} = \sum_{n \geq 0} a_n y^{-(n+1)}$ est la série formelle $\mathbf{G} = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$. Cette transformation se généralise en définissant la transformée de Borel de $y^{-(\alpha+1)}$ lorsque $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Z}$ par $\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ où Γ est la fonction d'Euler, et celle de y^n pour $n \in \mathbb{N}$ par $\delta^{(n)}$ la n -ième dérivée de la masse de Dirac en 0. La transformée de Borel du produit de deux séries formelles est un produit de convolution des deux transformées que nous noterons $*$. Les opérateurs de dérivation, d'exponentialisation et de composition se traduisent dans le plan de Borel de la manière suivante ([Lo], 3.6) :

- $\partial : g \mapsto -zg$
- $\exp : g \mapsto \delta + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} g^{*n}$
- $(\cdot \circ \phi) : g \mapsto g + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (\phi - \delta')^{*n} * \partial^n g$.

La transformée de $\widehat{F}$, $\mathbf{F}$ est une fonction holomorphe au voisinage de zéro dans la variable $z^{1/k}$ ayant des singularités au-dessus de $\mathbb{Z}$. Ces singularités empêchent $\mathbf{F}$ d'être une fonction entière donc $\widehat{F}$ de converger. Elles sont particulières et s'étudient grâce aux dérivations étrangères Δ_ω . Nous ne donnerons pas la définition des dérivées étrangères et renvoyons à [Ec] et [Lo].

La fonction $\mathbf{F}$ vérifie les équations de résurgence

$$\Delta_\omega \mathbf{F} = A_\omega \exp(-p\mathbf{F})$$

pour $w^k = p \in \mathbb{Z}$, où les A_ω sont des nombres complexes appelés coefficients de résurgence. Les difféomorphismes unitaires dont les invariants géométriques sont des homographies ramifiées à l'ordre p sont alors ceux dont l'itérateur n'a des coefficients de résurgence non nuls qu'au-dessus de p . Les difféomorphismes binaires d'invariants géométriques des homographies ramifiées à l'ordre p sont ceux dont l'itérateur n'a des coefficients de résurgence non nuls qu'au-dessus de p et $-p$.

Remarque 2.4.1 *Comme nous avons choisi l'itérateur qui conjugue le germe de difféomorphisme à la translation par $-2i\pi$, les coefficients de résurgence définis ci-dessus sont $-2i\pi$ fois ceux de [Ec] et [Lo].*

Théorème ([Ec])

1. Deux difféomorphismes formellement conjugués le sont analytiquement si et seulement si ils ont les mêmes coefficients de résurgence.
2. Si $\mathbf{F}$ est holomorphe en zéro dans la variable $z^{1/k}$, à croissance exponentielle d'ordre inférieur à un dans la variable z et vérifie les équations de résurgence ci-dessus, alors $y + \widehat{F}$ est l'itérateur d'un germe de difféomorphisme.

2.4.1 Le cas unitaire de résidu nul

Nous allons construire un $\mathcal{D}$ -groupeïde dont f est solution en tirant en arrière par un $\mathcal{D}$ -groupeïde dont la translation et les invariants analytiques de f sont solutions. La preuve du deuxième point du théorème 2.2.4 nous donne le seul $\mathcal{D}$ -groupeïde dont la translation et les invariants analytiques sont solutions : c'est $\mathcal{G}_2(p)$ avec p l'ordre

34 Chapitre 2. $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie au-dessus d'un germe de disque de $\mathbb{C}$

de ramification des invariants. En partant de $\mathcal{G}_2(p)$ on construit un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont f est solution de la manière suivante. L'itérateur f^* transporte $\mathcal{G}_2(p)$ sur un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie, dans la variable $y^{1/k}$, dont f est solution : $\mathcal{G}_2(\tilde{\mu})$ avec $\tilde{\mu} = p \frac{df^*}{dy} + \frac{d}{dy}(\log \frac{df^*}{dy})$. En revenant dans la variable y , on obtient un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}_2(\mu)$ dont f est solution, avec :

$$\mu(y) = \tilde{\mu}(y^k)ky^{k-1} + \frac{k-1}{y}.$$

Nous allons utiliser le deuxième point du théorème précédent pour construire un itérateur en suivant [Ec] p 473.

Pour tout germe de fonction holomorphe φ on a la formule suivante ([Ec], [Lo]) :

$$\Delta_\omega(\varphi \circ \gamma) = \partial \varphi \circ \gamma * \Delta_\omega(\gamma).$$

En utilisant l'égalité :

$$\Delta_\omega\left(\frac{1}{p}\log(1 + \mathbf{p} \cdot) \circ \gamma\right) = \Delta_\omega(\gamma) * \exp\left(-p\frac{1}{p}(\log(1 + \mathbf{p} \cdot) \circ \gamma)\right)$$

et le fait que $\Delta_\omega\left(\frac{1}{z^{1/k}-\omega}\right) = \frac{kp}{\omega}\delta$, une solution des équations est donnée par la formule :

$$\mathbf{F}(z) = \frac{1}{p}\log(1 + \mathbf{p} \cdot) \circ \left(\sum_{\omega^k=p} \frac{\omega}{kp} \frac{A_\omega}{z^{1/k}-\omega} \right).$$

Pour obtenir la somme de l'itérateur sur un secteur, il faut prendre la transformée de Laplace de $\mathbf{F}$ le long d'une demi-droite évitant le point p . La transformée de Laplace est l'inverse de la transformée de Borel. Elle transforme les symboles gras en leur analogue sur le plan complexe. Nous noterons

$$\begin{aligned} f^*(y) &= y + \int_0^\infty \mathbf{F}(z)e^{-zy}dz \\ &= y + \frac{1}{p}\log(1 + p \cdot) \circ \left(\sum_{\omega^k=p} \frac{\omega}{kp} A_\omega \int_0^\infty \frac{e^{-zy}}{z^{1/k}-\omega} dz \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{z-p}{z-\omega} = z^{(k-1)/k} - \left(\sum_{\tilde{\omega}^k=p, \tilde{\omega} \neq \omega} \tilde{\omega} \right) z^{(k-2)/k} + \dots + (-1)^{k-1} \left(\prod_{\tilde{\omega}^k=p, \tilde{\omega} \neq \omega} \tilde{\omega} \right),$$

l'intégrale $I_\omega(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-zy}}{z^{1/k}-\omega} dz$ vérifie l'égalité

$$\frac{d}{dy} I_\omega = -p I_\omega - P_\omega\left(\frac{1}{y^{1/k}}\right),$$

avec

$$\begin{aligned} &P_\omega\left(\frac{1}{y^{1/k}}\right) \\ &= \frac{\Gamma(1+\frac{k-1}{k})}{y^{1+(k-1)/k}} - \left(\sum_{\tilde{\omega}^k=p, \tilde{\omega} \neq \omega} \tilde{\omega} \right) \frac{\Gamma(1+\frac{k-2}{k})}{y^{1+(k-2)/k}} + \dots + (-1)^{k-1} \left(\prod_{\tilde{\omega}^k=p, \tilde{\omega} \neq \omega} \tilde{\omega} \right) \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

Ceci permet de calculer

$$\frac{df^*}{dy} = \frac{1 - \sum_{\omega^k=p} \frac{\omega}{kp} A_\omega P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}})}{1 + p \left(\sum_{\omega^k=p} \frac{\omega}{kp} A_\omega I_\omega \right)}$$

puis $\tilde{\mu}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(y) &= p \frac{df^*}{dy} + \frac{d}{dy} \left(\log \frac{df^*}{dy} \right) \\ &= p - \frac{\sum_{\omega^k=p} \frac{\omega}{kp} A_\omega \frac{d}{dy} \left(P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}}) \right)}{1 - \sum_{\omega^k=p} \frac{\omega}{kp} A_\omega P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}})}. \end{aligned}$$

La $\mathcal{D}$ -enveloppe du représentant canonique est $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec $\mu(y) = \tilde{\mu}(y^k)ky^{k-1} + \frac{k-1}{y}$. Dans le cas non ramifié, c'est-à-dire pour un difféomorphisme de la forme $x - 2i\pi x^2 + 4\pi^2 x^3 + \dots$ avec un seul invariant : A_p , on trouve que le paramètre du groupoïde est en y : $\mu(y) = p + \frac{A_p}{y^2 - A_p y}$ et en x : $\mu(x) = -\frac{p}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{A_p}{1 - A_p x}$ (voir [Ec] p 475).

2.4.2 Le cas binaire de résidu nul

Soit f un difféomorphisme binaire dont les invariants géométriques sont des homographies ramifiées à l'ordre p . Cela se traduit sur les coefficients de résurgence de l'itérateur de f par $A_\omega = 0$ si $\omega^{2k} \neq p^2$. Dans ce cas, les équations de résurgence sont plus difficiles à résoudre et nous n'y sommes pas arrivé. D'après la preuve du théorème 2.2.4, le $\mathcal{D}$ -groupoïde admettant comme solutions la translation et les invariants analytiques d'un difféomorphisme binaire est $\mathcal{G}_3(-p^2)$. Le difféomorphisme f d'itérateur f^* est alors solution du $\mathcal{D}$ -groupoïde (en la variable $ky^{1/k}$) $\mathcal{G}_3(\tilde{\nu})$ avec :

$$\tilde{\nu} = -p^2 \left(\frac{df^*}{dy} \right)^2 + 2 \frac{d^2}{dy^2} \left(\log \frac{df^*}{dy} \right) - \left(\frac{d}{dy} \left(\log \frac{df^*}{dy} \right) \right)^2.$$

D'après la proposition 2.2.3, le $\mathcal{D}$ -groupoïde $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec $\nu(y) = \tilde{\nu}(y^k)(ky^{k-1})^2 - \frac{k^2+1}{y^2}$ est la $\mathcal{D}$ -enveloppe de f .

Dans le cas des représentants canoniques formellement conjugués à $g_{1,0}$, J. Écalle trouve ([Ec] Tome 2 p 490) :

$$\nu(y) = -p^2 - p^2 \frac{B_p B_{-p}}{y^2} - 2p \frac{B_p - B_{-p}}{y(y + B_p + B_{-p})} - \frac{(B_p + B_{-p})^2 + 2p(B_p + B_{-p})}{y^2(y + B_p + B_{-p})^2}$$

où les B_p sont les coinvariants. Dans le cas binaire, ils sont reliés aux coefficients de résurgence par $\frac{A_p}{A_{-p}} = \frac{B_p}{B_{-p}}$ et $\frac{p}{4i\pi} \sqrt{A_p A_{-p}} = \sin(\frac{p}{4i\pi} \sqrt{B_p B_{-p}})$.

Chapitre 3

La $\mathcal{D}$ -enveloppe d'une application rationnelle

Dans cette partie nous donnons la liste des applications rationnelles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ ayant une $\mathcal{D}$ -enveloppe non triviale. Il s'agit des homographies, des monômes, des polynômes de Tchebitchev et des exemples de Lattès. Cette liste est celle des applications rationnelles admettant un commutant non trivial ([Ri1], [Fa], [Ju], [Er]). Par analogie avec l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens, les applications rationnelles ayant un commutant non trivial sont appelées "intégrables" ([Ve]). Dans notre contexte l'appellation "intégrable" est justifiée par le fait que plus la $\mathcal{D}$ -enveloppe est petite moins la dynamique est "transcendante".

3.1 Structure différentielle et algébrique sur $J^*(\mathbb{P}^1)$

Nous noterons $J_k^*(\mathbb{P}^1)$ l'espace des jets d'ordre k d'applications inversibles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$. Si on choisit deux cartes (U, x) et (V, y) de $\mathbb{P}^1$, un jet d'ordre k s'écrit $(x, y, y_1, \dots, y_k)$ avec $y_1 \neq 0$. L'anneau $\mathcal{O}_{U \times V}[y_1, y_1^{-1}, \dots, y_k]$ est l'anneau des équations différentielles d'ordre k sur les jets d'applications inversibles de U dans V . On munit ainsi $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$. Les inclusions naturelles $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)} \subset \mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\mathbb{P}^1)}$ permettent de définir $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)} = \lim \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ le faisceau d'anneaux des équations différentielles portant sur les applications inversibles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$. Ces anneaux sont munis d'une dérivation $D : \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)} \rightarrow \mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\mathbb{P}^1)}$ définie en coordonnées locales par :

$$D(E) = \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial E}{\partial y} y_1 + \dots + \frac{\partial E}{\partial y_k} y_{k+1}.$$

Un système d'équations différentielles sur les applications inversibles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ est un faisceau d'idéaux de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}$ différentiels et réduits tels que pour tout entier k le faisceau des équations d'ordre inférieur à k soit cohérent.

L'espace $J_k^*(\mathbb{P}^1)$ est muni d'une structure de groupoïde donnée par :

- les deux projections s, t , sur $\mathbb{P}^1$,
- une composition $c : J_k^*(\mathbb{P}^1) \times_{\mathbb{P}^1} J_k^*(\mathbb{P}^1) \rightarrow J_k^*(\mathbb{P}^1)$ définie sur les couples de jets (h, g) tels que $t(h) = s(g)$ par les formules habituelles :

$$c((x, y, y_1, \dots), (y, z, z_1, \dots)) = (x, z, z_1 y_1, \dots),$$

- une identité, $e : \mathbb{P}^1 \rightarrow J_k^*(\mathbb{P}^1)$ donnée par $e(x) = (x, x, 1, 0, \dots)$,
- une inversion $i : J_k^*(\mathbb{P}^1) \rightarrow J_k^*(\mathbb{P}^1)$ définie par $i(x, y, y_1, \dots) = (y, x, y_1^{-1}, \dots)$.

Toutes ces flèches sont compatibles au faisceau d'anneaux construit précédemment dans le sens où elles induisent des flèches s^*, t^*, e^*, i^* et c^* entre les anneaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ et $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)}$ compatibles aux injections $\mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1)} \subset \mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\mathbb{P}^1)}$.

3.1.1 Définitions dans la situation globale

Définition 3.1.1 *Un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sur $\mathbb{P}^1$ est donné par un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}$ réduits de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}$ tel que*

- $\mathcal{I}^k = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_k^*(\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1)}$ soit cohérent,
- $\mathcal{I}$ soit stable par dérivation,
- il existe un entier k et un ensemble analytique fermé Z dans $\mathbb{P}^1$ tels que
 - (i) pour tout $l \geq k$, $\mathcal{I}^l$ vérifie (1) et (2) de la définition 1.2.1,
 - (ii) sur tout voisinage de $(x, y, z) \in (\mathbb{P}^1 - Z) \times (\mathbb{P}^1 - Z) \times (\mathbb{P}^1 - Z)$, on a (3).

Définition 3.1.2 *Soit $R : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ une application rationnelle. Sa $\mathcal{D}$ -enveloppe est le plus petit des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie dont R est solution. Lorsque l'idéal de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde n'est pas (0), nous dirons que la $\mathcal{D}$ -enveloppe est non triviale.*

Dans le cas global, l'existence d'un plus petit groupoïde de Lie parmi une famille de $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie est prouvée dans [Ma5]. Nous allons montrer le résultat suivant :

Théorème 3.1.3 *Les seules applications rationnelles de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^1$ ayant une $\mathcal{D}$ -enveloppe non triviale sont, à conjugaison par une homographie près, les monômes, les polynômes de Tchébitchev et les exemples de Lattès.*

On construit ces applications par un procédé commun. On part d'une fonction méromorphe $\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$ et on cherche une application rationnelle $R_k : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ vérifiant $\Psi(kz) = R_k \circ \Psi$. Les monômes correspondent au choix de $\Psi(z) = e^z$, les polynômes de Tchébitchev à $\Psi(z) = \cos z$ et les différents exemples de Lattès par $\Psi(z) = \wp(z)$, $\wp^2(z)$, $\wp^3(z)$ ou $\wp'(z)$, ([B-M]), où $\wp$ désigne la fonction de Weierstrass.

3.1.2 Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie sur $\mathbb{P}^1$

Le théorème 2.1.4 que nous rappelons en dessous, donne la forme des équations engendrant l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie au-dessus d'un disque Δ . Pour un idéal

$\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)}$, nous noterons encore $\mathcal{I}$ l'idéal qu'il engendre dans le faisceau des équations différentielles "séparément méromorphes en x et en y " c'est-à-dire dans $\mathcal{M}_{\mathbb{P}^1} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s^*)} \mathcal{O}_{J^*(\mathbb{P}^1)} \otimes_{(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, t^*)} \mathcal{M}_{\mathbb{P}^1}$.

Théorème (2.1.4) *Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de Δ . Il est différentiablement engendré par une seule équation méromorphe d'ordre inférieur ou égal à trois d'une des cinq formes suivantes :*

- (0) $h(y) - h(x) = 0$ notée $\mathcal{G}_0(h)$,
- (1) $\eta(y)(y_1)^n - \eta(x) = 0$ avec n entier notée $\mathcal{G}_1^n(\eta)$,
- (2) $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$ notée $\mathcal{G}_2(\mu)$,
- (3) $\nu(y)(y_1)^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0$ notée $\mathcal{G}_3(\nu)$,
- (∞) $0 = 0$ notée $\mathcal{G}_\infty$

avec h, η, μ et ν méromorphes sur Δ .

Remarque 3.1.4 *Dans les cas (1), (2) et (3) la preuve ne prend pas en compte la taille du disque et celui-ci peut être remplacé par $\mathbb{C}$ tout entier. Dans le cas (0), il a été nécessaire de diminuer la taille du disque pour appliquer le théorème de Weierstrass. Lorsque la $\mathcal{D}$ -enveloppe d'une application rationnelle est localement de la forme (0), ses orbites sont discrètes donc cette fraction est une rotation d'angle rationnel. Ce cas ne nous intéressera pas dans la suite.*

Nous pouvons encore préciser la forme des équations des $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie de type (2) lorsque l'on suppose que ceux-ci sont définis sur $\mathbb{P}^1$ tout entier. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de $\mathbb{P}^1$ donné par des équations d'ordre deux. Nous connaissons les équations qui l'engendrent sur les deux ouverts $(\mathbb{P}^1 - \infty) \times (\mathbb{P}^1 - \infty)$ de coordonnées x et y et $(\mathbb{P}^1 - 0) \times (\mathbb{P}^1 - 0)$ de coordonnées $z = 1/x$ et $w = 1/y$: elles sont de la forme $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$ sur le premier ouvert et $\tilde{\mu}(w)w_1 + \frac{w_2}{w_1} - \tilde{\mu}(z) = 0$ sur le deuxième. Or cette dernière équation s'écrit dans les coordonnées x, y :

$$\tilde{\mu}\left(\frac{1}{y}\right)\frac{x^2}{y^2}y_1 + x^2\frac{y_2}{y_1} + 2\frac{x^2}{y}y_1 - 2x - \tilde{\mu}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

ou encore

$$\frac{1}{y^2}\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{y}\right) + 2y\right)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{x^2}\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\right) = 0$$

d'où $\frac{1}{x^2}\left(\tilde{\mu}\left(\frac{1}{x}\right) + 2x\right) = \mu(x)$ et μ est rationnelle sur $\mathbb{P}^1$.

Les calculs ci-dessus sont un cas particulier de la proposition que nous rappelons :

Proposition (2.1.3) *Soient une application $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ et x_i une coordonnée sur Δ_i . L'application φ donne naturellement une application $\varphi_* : J_k^*(\Delta_1) \rightarrow J_k^*(\Delta_2)$.*

L'image réciproque par φ d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie sur Δ_2 est un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie sur Δ_2 . Il est donné par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\varphi^*\mathcal{G}_0(h) &= \mathcal{G}_0(h \circ \varphi) \\ \varphi^*\mathcal{G}_1^n(\eta) &= \mathcal{G}_1^n(\eta \circ \varphi(\varphi')^n) \\ \varphi^*\mathcal{G}_2(\mu) &= \mathcal{G}_2(\mu \circ \varphi\varphi' + \frac{\varphi''}{\varphi'}) \\ \varphi^*\mathcal{G}_3(\nu) &= \mathcal{G}_3(\nu \circ \varphi(\varphi')^2 + S(\varphi))\end{aligned}$$

où $S(\varphi)$ est la Schwartzienne de φ par rapport à la coordonnée x_1 .

Corollaire 3.1.5 Les $\mathcal{D}$ -groupeïdes de Lie sur $\mathbb{P}^1$ dont l'idéal est engendré par des équations d'ordre supérieur ou égal à un sont de la forme (1), (2) et (3) du théorème 2.1.4 avec η , μ et ν rationnelles.

Le corollaire suivant de la proposition 2.1.3 nous sera utile dans la preuve du théorème principal.

Corollaire 3.1.6 Soient $\varphi : \Delta_1 \rightarrow \Delta_2$ et un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie $\mathcal{G}_3(\nu)$ (resp. $\mathcal{G}_2(\mu)$, $\mathcal{G}_1^n(\eta)$ ou $\mathcal{G}_0(h)$) au-dessus de Δ_1 . Il existe $\tilde{\mathcal{G}}$ un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de Δ_2 tel que $\varphi^*\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_3(\nu)$ (resp. $\mathcal{G}_2(\mu)$, $\mathcal{G}_1^n(\eta)$ ou $\mathcal{G}_0(h)$) si $\nu \circ \varphi^{-1}((\varphi^{-1})')^2 + S(\varphi^{-1})$ (resp. $\mu \circ \varphi^{-1}(\varphi^{-1})' + \frac{(\varphi^{-1})''}{(\varphi^{-1})'}$, $\eta \circ \varphi^{-1}((\varphi^{-1})')^n$ ou $h \circ \varphi^{-1}$) est méromorphe sur Δ_2 .

3.2 Preuve du théorème 3.1.3

Le cas où R est une homographie se traite facilement, R est solution de $\mathcal{G}_3(0)$. De manière plus précise, on sait qu'une homographie est dans une bonne coordonnée, x sur $\mathbb{P}^1$, soit une translation, soit une dilatation et laisse donc invariant un des deux champs de vecteurs $\frac{d}{dx}$ ou $x\frac{d}{dx}$. Ceci nous donne une équation du type (1) vérifiée par R . Nous supposons donc que R n'est pas une homographie.

Dans un premier temps, nous allons supposer que R est solution d'une équation différentielle $\mathcal{G}_2(\mu)$. Quitte à remplacer R par $R^{\circ n}$, nous pouvons trouver un point $p \in \mathbb{P}^1$ en dehors des pôles de μ et répulsif c'est-à-dire $R(p) = p$ et $R'(p) = \lambda$ avec $|\lambda| > 1$. Le théorème de Kœnigs nous permet alors de construire une linéarisante locale holomorphe

$$\Psi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{P}^1, p) \text{ vérifiant } \Psi(\lambda z) = R \circ \Psi \text{ et } \Psi'(0) = 1$$

qui se prolonge en un revêtement ramifié

$$\Psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1 - E \text{ par } \Psi(\lambda^n z) = R^{\circ n} \circ \Psi.$$

L'ensemble E est l'ensemble exceptionnel de R , c'est-à-dire l'ensemble de points q dont les préimages $R^{-n}(\{q\})$ n'accumulent pas l'ensemble de Julia de R . Cet

ensemble est composé de deux points lorsque R est un monôme az^k avec k entier, d'un point lorsque R est un polynôme et est vide sinon.

L'image réciproque par Φ du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie $\mathcal{G}_2(\mu)$ est le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie au-dessus de $\mathbb{C}$ $\mathcal{G}_2(\bar{\mu})$ où

$$\bar{\mu} = \mu \circ \Psi\Psi' + \frac{\Psi''}{\Psi'}.$$

L'homothétie $z \rightarrow \lambda z$ est solution de $\mathcal{G}_2(\bar{\mu})$ c'est-à-dire

$$\bar{\mu}(\lambda z)\lambda = \bar{\mu}(z).$$

Comme $|\lambda| > 1$, l'égalité ci-dessus implique $\bar{\mu}(z) = \frac{c}{z}$ pour une constante c . Nous avons supposé $\mu(p)$ fini et $\Psi'(0) = 1$ donc $\bar{\mu}(0)$ doit être fini ce qui force $\bar{\mu}$ à être nul. L'image réciproque de $\mathcal{G}_2(\mu)$ est donc le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie $\mathcal{G}_2(0)$ dont les solutions sont les applications affines de $\mathbb{C}$. Par construction de $\bar{\mu}$, une application γ telle que $\Psi \circ \gamma = \Psi$ laisse le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie $\mathcal{G}_2(\bar{\mu})$ invariant. La proposition 2.1.3 assure que dans ce cas γ est solution de $\mathcal{G}_2(\bar{\mu})$ donc est une application affine.

Considérons deux points p et q de $\mathbb{C}$ qui ne sont pas des points critiques de Ψ tels que $\Psi(p) = \Psi(q)$. Il existe une application locale $\gamma : (\mathbb{C}, p) \rightarrow (\mathbb{C}, q)$ vérifiant $\Psi \circ \gamma = \Psi$. Cette application est donc affine.

On obtient un sous-groupe des applications affines $G = \{\gamma \mid \Psi \circ \gamma = \Psi\}$, qui agit transitivement sur les fibres de Ψ . Ces fibres étant discrètes, ce groupe est discret.

Nous avons donc une condition nécessaire pour que la $\mathcal{D}$ -enveloppe de R soit de la forme $\mathcal{G}_2(\mu)$: il faut que R provienne du passage au quotient d'une homothétie par un groupe d'applications affines.

Cette condition est aussi suffisante. Considérons le réseau

$$\Lambda = \{b \mid (z \mapsto z + b) \in G\}.$$

On obtient une factorisation de Ψ :

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda \rightarrow \mathbb{P}^1$$

La dernière application induite par Ψ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}/\Lambda$ invariante sous l'action de G/Λ .

En vérifiant, pour tous les groupes G que l'on peut rencontrer, que $\frac{(\Psi^{-1})''}{(\Psi^{-1})'}$ est rationnelle et en utilisant le corollaire 3.1.6, on obtient la liste suivante d'applications :

1. $\Lambda = \{0\}$ et G est un groupe fini de rotation :
 $\Psi(z) = z^k$, R est une homothétie et $\mu = 0$.
2. $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $G = \Lambda$:
 $\Psi(z) = \exp(2i\pi z)$, R est un monôme et $\mu(z) = \frac{-1}{z}$.
3. $\Lambda = \mathbb{Z}$ et $G/\Lambda = \{+1, -1\}$:
 $\Psi(z) = \cos(2i\pi z)$, R est un polynôme Tchébitchév et $\mu(z) = \frac{-z}{z^2-4}$.

4. $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ et $G/\Lambda = \{+1, -1\}$:
 $\Psi(z) = \wp(z)$ ($\wp$ est la fonction de Weierstrass associée au réseau Λ et solution de $(\wp')^2 = 4\wp^3 + g_2\wp + g_3$ pour des constantes g_2 et g_3 définient par Λ), R est un exemple de Lattès et $\mu(z) = -\frac{6z^2+g_2/2}{4z^3+g_2z+g_3}$.
5. $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ et $G/\Lambda = \{+1, i, -1, -i\}$:
dans ce cas $g_3 = 0$, $\Psi(z) = \wp(z)^2$ et $\mu(z) = -\frac{1}{4z} - \frac{6z+g_2/2}{8z^2+2g_2z}$.
6. $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ et $G/\Lambda = \{+1, j, j^2\}$:
dans ce cas $g_2 = 0$, $\Psi(z) = \wp'(z)$ et $\mu(z) = -\frac{2}{3} \frac{z}{z^2-g_3}$.
7. $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}j$ et $G/\Lambda = \{+1, j, j^2, -j, -j^2, -1\}$:
dans ce cas $g_2 = 0$, $\Psi(z) = \wp(z)^3$ et $\mu(z) = -\frac{2}{9z} - \frac{1}{z+g_3/2}$.

Supposons maintenant que R soit solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}_3(\nu)$. En procédant comme précédemment, on obtient une linéarisante locale Ψ par le théorème de Kœnigs que l'on prolonge en un revêtement $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{P}^1$. L'homothétie $z \rightarrow \lambda z$ est solution de $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$ l'image réciproque de $\mathcal{G}_3(\nu)$ par Ψ . On a donc l'égalité :

$$\bar{\nu}(\lambda z)\lambda^2 = \bar{\nu}(z),$$

d'où on déduit que $\bar{\nu} = \frac{c}{z^2}$ pour une constante c . Comme $\bar{\nu}(0)$ est fini, on a $\bar{\nu} = 0$. L'image réciproque de $\mathcal{G}_3(\nu)$ est le groupoïde des homographies. Soit γ un germe d'application vérifiant $\Psi \circ \gamma = \Psi$. On établit comme précédemment $S(\gamma) = 0$ et γ est une homographie. Il existe donc un sous-groupe G des homographies qui agit transitivement sur les fibres de Ψ . Les fibres de Ψ étant des sous-ensembles discrets de $\mathbb{C}$, G ne peut être composé que d'applications affines. On obtient la même liste d'applications que pour les solutions de $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de type (2). On en déduit qu'aucune application rationnelle n'a de $\mathcal{D}$ -enveloppe de type (3). $\square$

Chapitre 4

Le groupoïde de Galois d'un germe de feuilletage de codimension un

Dans ce chapitre nous allons appliquer le lemme 1.4.4 et le théorème 2.1.4 pour étudier le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Galois d'un feuilletage singulier de codimension un. Dans une première partie, nous donnerons une preuve du théorème 4.1.2 en partie annoncé par B. Malgrange dans [Ma6] donnant les liens entre le rang transverse d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage et l'existence de suites de Godbillon-Vey méromorphes. Dans la deuxième partie nous utiliserons les formules explicites que nous donnons à la fin de la première partie ainsi que le théorème 2.2.4 pour déterminer la forme des invariants analytiques de singularités réduites admettant un groupoïde de Galois de rang transverse fini. Nous utiliserons la description sectorielle des invariants analytiques de ces singularités faite par J. Martinet et J.P. Ramis dans [M-R1] et [M-R2]. Dans les deux derniers chapitres, nous nous intéresserons aux intégrales premières d'un feuilletage de codimension un. Dans l'avant-dernier nous relierons certains types de transcendance d'intégrale première à l'existence de suites de Godbillon-Vey méromorphes et donc au rang transverse du groupoïde de Galois. Dans la dernière partie, nous montrerons que le groupoïde de Galois donne des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence d'intégrales premières dans un extension fortement normale du corps des fonctions méromorphes et donne aussi le groupe de Galois d'une telle extension.

4.1 Groupoïdes de Galois et Suites de Godbillon-Vey

Dans ce paragraphe, $\mathcal{F}_\omega$ désigne le feuilletage holomorphe singulier donné par une 1-forme ω intégrable ($\omega \wedge d\omega = 0$) sur un polydisque Δ dans $\mathbb{C}^n$. On pourra supposer que le lieu singulier de ω est de codimension deux.

Définition 4.1.1 ([G-V]) Une suite de Godbillon-Vey pour ω est une suite de 1-formes méromorphes $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots$ telles que :

$$\begin{aligned}
d\omega &= \omega \wedge \omega_1 \\
d\omega_1 &= \omega \wedge \omega_2 \\
&\vdots \\
d\omega_n &= \omega \wedge \omega_{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \omega_k \wedge \omega_{n-k+1}
\end{aligned}$$

Elle sera dite de longueur ℓ si $\omega_i = 0$ pour $i \geq \ell$, de longueur 1 si il existe F méromorphe et un entier k tels que $d(F^{1/k}\omega) = 0$.

On remarquera que les suites de longueur 1 sont des suites de longueur 2 particulières correspondant à $\omega_1 = \frac{1}{k} \frac{dF}{F}$. La fonction multivaluée $F^{1/k}$ est appelée facteur intégrant de la forme ω . Sur Δ une telle suite existe toujours grâce à l'algorithme de Godbillon-Vey. Par contre l'existence d'une suite de longueur finie pour ω n'est pas toujours assurée. La longueur minimale des suites, mais pas la suite elle-même, ne dépend que du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$. Les feuilletages de codimension un admettant une suite de Godbillon-Vey de longueur inférieure ou égale à trois sont caractérisés par leur groupoïde de Galois :

Théorème 4.1.2 *Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ admet une suite de Godbillon-Vey de longueur ℓ avec $\ell \leq 3$ si et seulement si son groupoïde de Galois est contenu dans un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang transverse ℓ .*

Preuve du théorème 4.1.2 pour $\ell = 1$. – Si $\mathcal{F}$ admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 1, il existe F méromorphe et un entier k tels que $d(F^{1/k}\omega) = 0$. Soit Γ un difféomorphisme local conservant le feuilletage, c'est-à-dire vérifiant $\Gamma^*(\omega) = f_\Gamma \omega$ pour une fonction f_Γ . On a alors $\Gamma^*(F^{1/k}\omega) = F^{1/k} \circ \Gamma f_\Gamma \omega$. Considérons l'équation d'invariance de la forme fermée :

$$\Gamma^*(F^{1/k}\omega) = F^{1/k}\omega.$$

En prenant la puissance k -ième, nous obtenons l'équation à coefficients méromorphes :

$$F = F \circ \Gamma f_\Gamma^k.$$

Ceci est l'équation d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie. En effet f_Γ est un polynôme en les dérivées premières de Γ à coefficients holomorphes en Γ et méromorphes en x . De plus l'égalité

$$f_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = (f_{\Gamma_1} \circ \Gamma_2) f_{\Gamma_2}$$

permet de vérifier les axiomes d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie :

$$\begin{aligned}
F \circ (\Gamma_1 \circ \Gamma_2) f_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2}^k - F \\
= ((F \circ \Gamma_1 f_{\Gamma_1}^k - F) f_{\Gamma_2}^k) \circ \Gamma_2 - (F \circ \Gamma_2 f_{\Gamma_2}^k - F).
\end{aligned}$$

Vérifions que ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est admissible pour le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$. Notons L_X la dérivé de Lie par rapport à un champ X et pour un champ X préservant le feuilletage définissons f_X par $L_X\omega = f_X\omega$. La $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie du groupoïde d'invariance de la forme fermée a pour équation :

$$L_X F + k F f_X = 0$$

obtenue en linéarisant l'équation $F = F \circ \Gamma f_\Gamma^k$. Pour tout champ X vérifiant $\omega(X) = 0$, on a

$$\begin{aligned} d(F^{1/k}\omega)(X, \cdot) &= d(F^{1/k})(X)\omega + F^{1/k}d\omega(X, \cdot) \\ &= (L_X F^{1/k} + F^{1/k}f_X)\omega \\ &= \left(\frac{1}{k} \frac{L_X F}{F} + f_X\right) F^{1/k}\omega. \end{aligned}$$

L'équation $d(F^{1/k}\omega) = 0$ est équivalente au fait que tout champ de vecteur tangent au feuilletage vérifie l'équation de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie. Par définition de $\mathcal{G}al(\mathcal{F}_\omega)$, ce dernier est inclus dans le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie d'équations :

$$\Gamma^*\omega \wedge \omega = 0 \text{ et } F^k = F^k \circ \Gamma f_\Gamma^k.$$

Cette équation étant d'ordre un, son expression locale donne une équation d'ordre un qui correspond donc à un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang transverse un.

Réciproquement, supposons que $\mathcal{F}$ admette un groupoïde admissible de rang transverse un. Sur chaque carte de redressement de coordonnée transverse t , son équation, donnée par le (3) du théorème 2.1.4 et le lemme 1.4.4, est celle du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie d'invariance de la forme méromorphe $(\gamma(t)dt)^{\otimes k}$. L'entier k ne dépend pas de la carte locale car il est déterminé par le groupe d'isotropie. Les pôles et les zéros des différentes formes locales $\gamma^{\otimes k}$ se recollent en un ensemble analytique Z de codimension un. Dans chaque carte de redressement du feuilletage ne rencontrant pas Z , définissons le facteur intégrant local par

$$\Phi(z, t) = \frac{\gamma(t)}{w(z, t)}$$

où w est défini en coordonnées par $\omega = w(z, t)dt$.

Sur un autre ouvert muni de coordonnées redressantes $(\tilde{z}, \tilde{t})$, considérons la forme $\tilde{\gamma}$ et le facteur intégrant $\tilde{\Phi}$ définis de manière analogue.

Des changements de coordonnées :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(\tilde{t}) \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \right) &= \zeta \gamma(t) \text{ avec } \zeta^k = 1 \\ \text{et } \tilde{w}(\tilde{z}, \tilde{t}) \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} &= w(z, t), \end{aligned}$$

on déduit que les facteurs intégrants Φ se recollent en dehors de Z à multiplication par une racine de l'unité près. La fonction $F = \Phi^k$ est bien définie et est méromorphe en dehors du lieu singulier du feuilletage. Celui-ci est de codimension deux et le théorème de Hartogs assure son prolongement méromorphe sur Δ . Toute racine k -ième de cette fonction est un facteur intégrant et définit une suite de Godbillon-Vey de longueur un pour le feuilletage. $\square$

Remarque 4.1.3 Si $\mathcal{F}$ n'a pas d'intégrale première méromorphe, la forme $F^{1/k}\omega$ est unique à multiplication par une constante près. Les équations du $\mathcal{D}$ -groupeïde que nous obtenons sont indépendantes de la forme ω initialement choisie.

Preuve du théorème 4.1.2 pour $\ell = 2$. – Supposons que $\mathcal{F}$ admette une suite de Godbillon-Vey de longueur deux donnée par une forme α telle que $d\omega = \omega \wedge \alpha$ et $d\alpha = 0$. Soit $(X, Y) = \Gamma(x, y)$ un germe de difféomorphisme local préservant le feuilletage, c'est-à-dire vérifiant :

$$\Gamma^*\omega = f_\Gamma\omega.$$

Les égalités

$$\begin{aligned}\Gamma^*d\omega &= \Gamma^*\omega \wedge \Gamma^*\alpha = -f_\Gamma\Gamma^*\alpha \wedge \omega \\ d\Gamma^*\omega &= df_\Gamma \wedge \omega + f_\Gamma d\omega = (df_\Gamma - f_\Gamma\alpha) \wedge \omega\end{aligned}$$

donnent la relation

$$(\Gamma^*\alpha - \alpha + \frac{df_\Gamma}{f_\Gamma}) \wedge \omega = 0$$

entre les facteurs intégrants α pour ω et $\Gamma^*\alpha$ pour $\Gamma^*\omega$. Il existe donc une fonction g_Γ , déterminée par Γ , ses dérivées premières et secondes, vérifiant

$$\Gamma^*\alpha - \alpha + \frac{df_\Gamma}{f_\Gamma} = g_\Gamma\omega.$$

On vérifie que les coefficients g_Γ satisfont

$$g_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = (g_{\Gamma_1} \circ \Gamma_2)f_{\Gamma_2} + g_{\Gamma_2}.$$

Les transformations Γ telles que $g_\Gamma = 0$ sont donc solutions d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie d'ordre deux. Montrons que ce $\mathcal{D}$ -groupeïde est admissible. Plus précisément, montrons qu'il contient $\mathcal{Gal}(\mathcal{F}_\omega)$ si et seulement si la forme α est fermée. En reprenant les notations du cas précédent, les équations linéarisées le long de l'identité de $g_\Gamma = 0$ sont

$$L_X\omega = f_X\omega \text{ et } df_X + L_X\alpha = 0.$$

Prenons un champ X tel que $\omega(X) = 0$. On a alors :

$$\begin{aligned}L_X\omega &= d(\omega(X)) + d\omega(X, \cdot) \\ &= -\alpha(X)\omega \\ \text{donc } df_X &= -d(\alpha(X)) \\ \text{et } L_X\alpha &= d(\alpha(X)) + d\alpha(X, \cdot).\end{aligned}$$

Nous en déduisons que X est solution du système linéarisé si et seulement si $d\alpha = 0$. L'équation $g_\Gamma = 0$ étant d'ordre deux, le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible que nous venons de construire est de rang transverse deux.

Réciproquement, supposons qu'il existe un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible de

rang transverse deux. Nous allons utiliser l'expression locale de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie pour construire une intégrale première à monodromie affine. Plaçons nous sur un ouvert de redressement de coordonnées (t, z) du feuilletage. La forme ω s'écrit $w(t, z)dt$ et les équations du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible, données par lemme 1.4.4 et le théorème 2.1.4, sont de la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ et } \mu(t) = \mu(T) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}{\frac{\partial T}{\partial t}}.$$

Quitte à le restreindre, supposons que cet ouvert soit simplement connexe et ne contienne pas de pôles de μ . Considérons sur cet ouvert une intégrale première H solution des équations :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}}{\frac{\partial H}{\partial t}} = \mu.$$

Sur un ouvert analogue muni de coordonnées $(\tilde{t}, \tilde{z})$ nous construisons de même une intégrale première $\tilde{H}$. Un calcul direct de changement de coordonnées dans les équations d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sur un disque ([Cas2]) donne

$$\tilde{\mu}(\tilde{t}) = \mu(t) \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} + \frac{\frac{\partial^2 t}{\partial \tilde{t}^2}}{\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}}.$$

Ainsi $\tilde{H}$ vérifie

$$\frac{\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \tilde{t}^2}}{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{t}}} = \frac{\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial t^2}}{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}} \frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} + \frac{\frac{\partial^2 t}{\partial \tilde{t}^2}}{\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}} = \tilde{\mu},$$

d'où

$$\frac{\frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \tilde{t}^2}}{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{t}}} = \mu = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}}{\frac{\partial H}{\partial t}}.$$

Sur l'intersection des deux ouverts, que l'on suppose connexe, il existe donc deux constantes a et b telles que $\tilde{H} = aH + b$. En prolongeant une solution locale par cette formule, on construit une intégrale première H du feuilletage, en dehors du lieu des pôles des différents μ , multivaluée à monodromie affine. La fonction $F = \frac{\frac{\partial H}{\partial t}}{w}$ vérifie

$$d(Fw dt) = 0.$$

La forme fermée $\alpha = \frac{dF}{F}$ est univaluée en dehors des pôles des différents μ et vérifie $d\omega = \omega \wedge \alpha$. Sur une carte de redressement contenant des pôles de μ , la forme $\alpha = \frac{dF}{F}$ se prolonge méromorphiquement. En effet,

$$\alpha = \frac{dF}{F} = \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}}{\frac{\partial H}{\partial t}} dt - \frac{dw}{w} = \mu(t) dt - \frac{dw}{w},$$

où les fonctions μ et w sont méromorphes sur chaque carte de redressement. Le lieu singulier du feuilletage étant de codimension au moins deux, la forme α se prolonge méromorphiquement au polydisque. $\square$

Remarque 4.1.4 *Les suites de Godbillon-Vey de longueur deux de la forme (ω, α) et $(f\omega, \alpha - \frac{df}{f})$ sont équivalentes (voir [Sc] et [Go]) : elles définissent la même structure affine transverse en dehors de Z . S'il n'existe pas de facteur intégrant méromorphe, la suite (ω, α) est unique à équivalence près. L'équation du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang deux que nous obtenons est alors unique.*

Preuve du théorème 4.1.2 pour $\ell = 3$. – Nous suivrons la même stratégie que dans les cas précédents. Supposons qu'il existe des formes méromorphes α et β telles que :

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge \alpha \\ d\alpha &= \omega \wedge \beta \\ d\beta &= \alpha \wedge \beta. \end{aligned}$$

Soit Γ un automorphisme local du feuilletage et f_Γ le coefficient de proportionnalité qu'il définit. De la première équation de Godbillon-Vey, nous déduisons l'existence d'une fonction g_Γ , déterminée par Γ , ses dérivées premières et secondes, vérifiant :

$$\Gamma^*\alpha - \alpha + \frac{df_\Gamma}{f_\Gamma} = g_\Gamma\omega.$$

De la deuxième équation, nous déduisons les égalités :

$$\begin{aligned} d(\Gamma^*\alpha) &= \omega \wedge (f_\Gamma \Gamma^*\beta) \\ d(\alpha - \frac{df_\Gamma}{f_\Gamma} + g_\Gamma\omega) &= \omega \wedge \beta + dg_\Gamma \wedge \omega + g_\Gamma \omega \wedge \alpha. \end{aligned}$$

En faisant la différence, on obtient :

$$(f_\Gamma \Gamma^*\beta - \beta + dg_\Gamma - g_\Gamma\alpha) \wedge \omega = 0.$$

Il existe donc une fonction h_Γ dépendant des dérivées troisièmes de Γ telle que

$$f_\Gamma \Gamma^*\beta - \beta - g_\Gamma\alpha + dg_\Gamma = h_\Gamma\omega.$$

Nous en déduisons :

$$h_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} = h_{\Gamma_2} + h_{\Gamma_1} \circ \Gamma_2 (f_{\Gamma_2})^2 + g_{\Gamma_1} \circ \Gamma_2 g_{\Gamma_2} f_{\Gamma_2}$$

d'où :

$$h_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2} - \frac{1}{2}(g_{\Gamma_1 \circ \Gamma_2})^2 = (h_{\Gamma_2} - \frac{1}{2}(g_{\Gamma_2})^2) + (h_{\Gamma_1} - \frac{1}{2}(g_{\Gamma_1})^2) \circ \Gamma_2 (f_{\Gamma_2})^2.$$

L'équation $h_\Gamma - \frac{1}{2}(g_\Gamma)^2 = 0$ vérifie les axiomes d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde d'ordre trois. Montrons que ce $\mathcal{D}$ -groupoïde contient $\mathcal{Gal}(\mathcal{F}_\omega)$ si et seulement si la troisième équation de la suite de Godbillon-Vey est vérifiée. La $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie a pour équation :

$$f_X\beta + L_X\beta - g_X\alpha + dg_X = 0$$

où $g_X\omega = df_X + L_X\alpha$. Soit X tel que $\omega(X) = 0$. Comme dans la preuve précédente, on a $f_X = -\alpha(X)$. Nous déduisons

$$g_X\omega = -d(\alpha(X)) + d(\alpha(X)) + d\alpha(X, \cdot) = -\beta(X)\omega.$$

Des égalités

$$d\beta(X, \cdot) = L_X\beta + d(g_X)$$

$$\alpha \wedge \beta(X, \cdot) = -f_X\beta + g_X\alpha$$

on obtient par différence l'équation de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie sous la forme :

$$(d\beta - \alpha \wedge \beta)(X, \cdot) = 0.$$

La troisième équation de la suite de Godbillon-Vey est donc équivalente au fait que tout champ tangent au feuilletage est solution de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie que nous venons de construire. Ceci prouve l'inclusion de $\mathcal{G}al(\mathcal{F}_\omega)$ dans un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse trois.

Réciproquement, supposons que le feuilletage admette un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse trois. Sur un ouvert de redressement du feuilletage de coordonnées (t, z) , les équations du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible, données par lemme 1.4.4 et le théorème 2.1.4, sont de la forme :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ et } \nu(t) = \nu(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right)^2 + S_t(T)$$

où $S_t(T) = 2\frac{\frac{\partial^3 T}{\partial t^3}}{\frac{\partial T}{\partial t}} - 3\left(\frac{\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}}{\frac{\partial T}{\partial t}}\right)^2$ est la schwartzienne de T par rapport à t . Nous allons nous servir de ν pour construire une intégrale première du feuilletage H à monodromie projective et un couple de formes méromorphes (α, β) vérifiant les équations de Godbillon-Vey. Nous pouvons toujours choisir une forme méromorphe α vérifiant la première équation : il suffit de prendre un champ méromorphe X vérifiant $\omega(X) = 1$ et de poser $\alpha = L_X\omega$. Plaçons-nous sur un ouvert de redressement ne rencontrant pas le lieu des pôles Z des différents ν . Soit H une intégrale première sur cet ouvert solution des équations :

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \text{ et } S_t H = \nu(t).$$

Soit $\tilde{H}$ une intégrale première construite de manière analogue sur un ouvert de redressement muni des coordonnées $(\tilde{t}, \tilde{z})$. D'après les changements de variables usuels sur les dérivées Schwartziennes et sur les équations des $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie [Cas2], nous avons

$$S_t \tilde{H} = S_{\tilde{t}} \tilde{H} \left(\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + S_{\tilde{t}} \tilde{t}$$

et

$$\nu(t) = \tilde{\nu}(\tilde{t}) \left(\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}} \right)^2 + S_{\tilde{t}} t.$$

Nous en déduisons que $S_t \tilde{H} = S_t H$ et donc que H se prolonge de manière multivaluée sur le complémentaire de Z avec une monodromie projective. A partir de cette intégrale première, on construit la fonction F par $dH = F\omega$ d'où :

$$\frac{dF}{F} \wedge \omega + d\omega = 0.$$

Contrairement au cas précédent, la forme $\frac{dF}{F}$ n'est pas méromorphe. La forme $\gamma = \frac{dF}{F} - \alpha$ vérifie $\gamma = G\omega$ pour une certaine fonction G . On a alors $d\alpha = \omega \wedge (dG - G\alpha)$. La forme β cherchée est de la forme :

$$\beta = dG - G\alpha + K\omega.$$

En remplaçant cette expression dans la troisième équation de Godbillon-Vey, on obtient :

$$(dK + GdG) \wedge \omega + (G^2 + 2K)\omega \wedge \alpha = 0.$$

Posons $K = -\frac{1}{2}G^2$. Ceci nous permet de construire la forme β à partir de α et G vérifiant les équations de Godbillon-Vey. Il nous reste à montrer sa méromorphie. En prenant une autre détermination $\tilde{H} = \frac{aH+b}{cH+e}$, nous obtenons, *a priori*, une autre forme $\tilde{\beta}$. En calculant cette forme, on a :

$$\begin{aligned} d\tilde{H} = \tilde{F}\omega &= \frac{F}{(cH+e)^2} \omega \\ \frac{d\tilde{F}}{\tilde{F}} &= \frac{dF}{F} - 2\frac{c}{cH+e} dH \\ \tilde{G} &= G - \frac{2cF}{cH+e} \\ d\tilde{G} &= dG - \frac{2cdF}{cH+e} + \frac{2c^2F^2\omega}{(cH+e)^2} \\ \tilde{G}\alpha &= G\alpha - \frac{2cF\alpha}{cH+e} \\ \frac{1}{2}\tilde{G}^2\omega &= \frac{1}{2}G^2\omega - \frac{2cGF\omega}{cH+e} + \frac{2c^2F^2\omega}{(cH+e)^2}. \end{aligned}$$

En remplaçant dF par $F\alpha + FG\omega$, on vérifie que $\beta = \tilde{\beta}$. La forme β est donc univaluée sur les ouverts de redressement ne rencontrant pas Z . Vérifions qu'elle admet un prolongement méromorphe sur Z . Sur une carte de redressement on écrit

$\omega = w(t, z)dt$ et $\alpha = a_t(t, z)dt + a_z(t, z)dz$. Dans ces coordonnées $F = \frac{1}{w} \frac{\partial H}{\partial t}$ d'où :

$$\begin{aligned}
 Gwdt &= \left(\frac{\partial_{t,t}H}{\partial_t H} - \frac{\partial_t w}{w} - a_t \right) dt + \left(\frac{\partial_z w}{w} + a_z \right) dz \\
 G &= \frac{1}{w} \left(\frac{\partial_{t,t}H}{\partial_t H} - \frac{\partial_t w}{w} - a_t \right) \text{ et } \frac{\partial_z w}{w} + a_z = 0 \\
 dG &= -\frac{\partial_t w}{w} Gdt - \frac{\partial_z w}{w} Gdz + \frac{1}{w} \left[\partial_t \left(\frac{\partial_{t,t}H}{\partial_t H} - \frac{\partial_t w}{w} - a_t \right) \right] dt \\
 &\quad + \frac{1}{w} \left(\partial_z \left(-\frac{\partial_t w}{w} - a_t \right) \right) dz \\
 -G\alpha &= -a_t Gdt - a_z Gdz \\
 -\frac{1}{2}G^2\omega &= \frac{1}{w} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial_{t,t}H}{\partial_t H} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t w}{w} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. -\frac{1}{2}a_t^2 + \frac{\partial_{t,t}H}{\partial_t H} \frac{\partial_t w}{w} + \frac{\partial_{t,t}H}{\partial_t H} a_t - \frac{\partial_t w}{w} a_t \right].
 \end{aligned}$$

En sommant les trois dernières équations, après simplification, on trouve :

$$\beta = \frac{1}{w} \left[\nu(t)dt - d \left(\frac{\partial_t w}{w} + a_t \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t w}{w} + a_t \right)^2 dt \right].$$

On en déduit que la forme β est méromorphe en dehors du lieu singulier du feuilletage et se prolonge méromorphiquement à celui-ci. $\square$

Remarque 4.1.5 *Les suites de Godbillon-Vey de longueur trois de la forme (ω, α, β) et $(f\omega, \alpha - \frac{df}{f} + g\omega, \frac{1}{f}(\beta - dg + g\alpha + \frac{g^2}{2}\omega))$ sont équivalentes (voir [Sc] et [Go]) : elles définissent la même structure transverse projective en dehors de Z . Dans le cas où le feuilletage n'admet pas de suite de Godbillon-Vey de longueur deux, la suite de longueur trois est unique à équivalence près. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie obtenu est indépendant de la suite.*

Remarque 4.1.6 *Au cours de la preuve de ce théorème, nous avons donné les équations explicites d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage ainsi que son expression locale sur une transverse. Soit (t, z) des coordonnées de redressement. La forme ω s'écrit $w(t, z)dt$. L'expression locale du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse est donnée par les formules suivantes :*

1. Soit $(\omega, F^{1/k})$ une suite de longueur un pour le feuilletage. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse est $\mathcal{G}_1(\mu)$ avec :

$$\mu(t)dt = \frac{1}{k} \frac{dF}{F} + \frac{dw}{w}.$$

2. Soit (ω, α) une suite de longueur deux pour le feuilletage. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse est $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec :

$$\mu(t)dt = \alpha + \frac{dw}{w}.$$

3. Soit (ω, α, β) une suite de longueur trois pour le feuilletage. La forme α s'écrit $a_t dt + a_z dz$. Le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie transverse est $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec :

$$\nu(t)dt = w\beta + d\left(\frac{\partial_t w}{w} + a_t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_t w}{w} + a_t\right) dt.$$

Réciproquement, ces mêmes formules permettent d'obtenir une suite de Godbillon-Vey explicite à partir des équations d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible.

4.2 Groupeïdes de Galois et intégrales premières

Rappelons les types de transcendances d'extensions du corps des fonctions méromorphes sur un polydisque Δ de $\mathbb{C}^n$.

Définitions 4.2.1

1. Une extension différentielle du corps des fonctions méromorphes sera dite de type Darboux si elle est obtenue par une suite d'extensions qui sont soit algébriques soit du type $K(G) \supset K$ avec $dG = \gamma$, γ étant une forme à coefficients dans K .
2. Une extension différentielle du corps des fonctions méromorphes sera dite Liouvillienne si elle est obtenue par une suite d'extensions qui sont soit algébriques soit du type $K(G) \supset K$ avec $dG = G\gamma_1 + \gamma_0$, γ_1 et γ_0 étant des formes à coefficients dans K .
3. Une extension différentielle du corps des fonctions méromorphes sera dite de type Riccati si elle est obtenue par une suite d'extensions qui sont soit algébriques soit du type $K(G) \supset K$ avec $dG = \frac{G^2}{2}\gamma_2 + G\gamma_1 + \gamma_0$, γ_2 , γ_1 et γ_0 étant des formes à coefficients dans K .

Théorème 4.2.2 Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage de codimension un de $(\mathbb{C}^n, 0)$. Le feuilletage $\mathcal{F}$ admet un intégrale première méromorphe (resp. de type Darboux, Liouville ou Riccati) si et seulement si $\mathcal{F}$ admet un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible de rang transverse 0 (resp. 1, 2 ou 3).

Nous allons commencer par prouver le cas non transitif (rang transverse 0). Les trois autres affirmations seront prouvées simultanément par la suite.

Lemme 4.2.3 Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage de Δ de codimension un et $\mathcal{I}$ l'idéal du groupeïde de Galois de $\mathcal{F}$. Si le groupeïde de Galois n'est pas transitif alors l'idéal des équations d'ordre zéro, $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I} \cap \mathcal{O}_{J_0^*(\Delta)}$ de l'anneau $\mathcal{O}_{J_0^*(\Delta)}$, est engendré par une unique équation.

Preuve. – Plaçons-nous au voisinage d'un point régulier du feuilletage. D'après la forme des équations locales du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie (voir le lemme 1.4.4), et le fait que sa $\mathcal{D}$ -algèbre de lie soit de rang transverse nul, l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré par une équation d'ordre 0 (voir le (4) du théorème 2.1.4). Ceci signifie que l'idéal $\mathcal{I}$ est engendré au voisinage de tout point de l'identité $\{(x, x, id, 0, \dots, 0) | x \notin \text{Sing}(\mathcal{F})\}$ dans $J^*(\Delta)$ par une équation d'ordre zéro. Nous allons étendre cette propriété à tout jet dont la source et le but en dehors d'un ensemble de codimension un.

En utilisant le théorème d'involutivité générique pour les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie (théorème 1.2.12) et le théorème de Cartan-Kähler (1.1.7), il existe un sous-ensemble analytique Z de Δ et un entier ℓ tels que par tout point $a = (s(a), t(a), \dots)$ de $J_\ell^*(\Delta)$ solution de $\mathcal{I}_\ell$ de source et but hors de Z passe une solution convergente φ de $\mathcal{I}_\ell$. Quitte à supposer ℓ assez grand, φ est solution de $\mathcal{I}$: en effet d'après le théorème 1.1.9, il existe un entier ℓ tel que $\mathcal{I}_\ell$ engendre différentiablement $\mathcal{I}$.

Par composition à la source, cette solution donne un isomorphisme d'un voisinage de $(t(a), t(a), id, 0, \dots)$ sur un voisinage de a dans l'espace des jets d'ordre ℓ . Puisque φ est solution de $\mathcal{I}$ et que les zéros de $\mathcal{I}_\ell$ sont stables par composition en dehors de Z , cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme local des espaces définis par $\mathcal{I}_\ell$ aux voisinages de ces mêmes points. Nous en déduisons qu'au voisinage de n'importe quel point au-dessus de source et but en dehors de Z , $\mathcal{I}$ est engendré par une équation d'ordre 0. Le lieu des zéros V de $\mathcal{I}_0$ est de codimension un dans $(\Delta - Z) \times (\Delta - Z)$. De plus cet ensemble analytique V n'a pas de composante irréductible incluse dans $(Z \times \Delta) \cup (\Delta \times Z)$. Dans le cas contraire il existerait une fonction f holomorphe sur V nulle sur le complémentaire de la composante irréductible et non nulle sur celle-ci. Puisque le produit de cette fonction par une équation de Z est identiquement nul sur V , f serait de torsion pour une des deux projections. L'idéal $\mathcal{I}$ étant différentiel et réduit, ceci est en contradiction avec le lemme 1.1.3. Le lieu des zéros de l'idéal réduit $\mathcal{I}_0$ étant de codimension un, il est donc engendré par une équation H ([Ei]). $\square$

Une relation d'équivalence analytique sur Δ est la donnée d'un idéal I de $\mathcal{O}_{\Delta \times \Delta}$ qui s'annule sur la diagonale, qui est stable par la symétrie par rapport à la diagonale et qui vérifie la relation de transitivité suivante :

$$pr_{2,3}^* \mathcal{I} \subset pr_{1,2}^* \mathcal{I} + pr_{1,3}^* \mathcal{I}$$

où les $pr_{i,j}$ désignent les trois projections naturelles de $\Delta \times \Delta \times \Delta$ sur $\Delta \times \Delta$.

Lemme 4.2.4 *Sous les hypothèses du lemme 4.2.3, il existe un sous-ensemble analytique Z de Δ tel que l'idéal $\mathcal{I}_0 = (H(x, y))$ définisse une relation d'équivalence analytique sur $\Delta - Z$.*

Preuve. – L'idéal $\mathcal{I}_0$ étant formé des équations d'ordre zéro de l'idéal $\mathcal{I}$ décrivant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie, les propriétés de réflexivité et de symétrie sont vérifiées. La stabilité par composition nous donne l'inclusion de $pr_{2,3}^* \mathcal{I}_0$ dans l'idéal différentiablement engendré par $pr_{1,2}^* \mathcal{I}_0 + pr_{1,3}^* \mathcal{I}_0$. Il nous faut vérifier qu'il est inclus dans

l'idéal algébriquement engendré par $pr_{1,2}^*\mathcal{I}_0 + pr_{1,3}^*\mathcal{I}_0$. Soit Z , l'ensemble analytique en dehors duquel on a la stabilité par composition du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie (voir (3) de la définition 1.2.2). Plaçons-nous sur $(\Delta - Z) \times (\Delta - Z) \times (\Delta - Z)$ et considérons les équations $pr_{1,2}^*H = H(x, y)$ et $pr_{1,3}^*H = H(x, z)$. Quitte à augmenter Z , les formes verticales pour la première projection :

$$\sum \frac{\partial H}{\partial y_i}(x, y) dy_i \quad \text{et} \quad \sum \frac{\partial H}{\partial z_i}(x, z) dz_i$$

ne s'annulent pas. On note $\mathcal{I}$ l'idéal différentiel engendré par $(H(x, y), H(x, z))$ dans $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta)}$ et $\mathcal{I}_k$ les équations de $\mathcal{I}$ d'ordre inférieur ou égal à k . Le fait que ces formes soient non nulles et non colinéaires nous permet d'utiliser une généralisation du théorème des fonctions implicites (voir [To]) : pour tout zéro (x, y, z) de $(H(x, y), H(x, z))$ dans $(\Delta - Z) \times (\Delta - Z) \times (\Delta - Z)$, on peut trouver un zéro de $\mathcal{I}$ au-dessus de celui-ci pour la projection $J_k(\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta) \rightarrow \Delta \times \Delta \times \Delta$. Ceci signifie que $\mathcal{I}_k \cap \mathcal{O}_{J_0(\Delta \rightarrow \Delta \times \Delta)}$ coïncide avec l'idéal algébriquement engendré par $H(x, y)$ et $H(x, z)$ sur $(\Delta - Z) \times (\Delta - Z) \times (\Delta - Z)$ pour tout entier k . Les équations d'ordre zéro appartenant à $\mathcal{I}$ sont donc exactement celles de cet idéal.

Pour ℓ assez grand, $\mathcal{I}_\ell$ est un sous-groupeïde de $J_\ell^*(\Delta - Z)$, donc $H(y, z)$ appartient à $\mathcal{I}_\ell$. D'après ce qui précède $H(y, z)$ appartient à l'idéal engendré algébriquement par $H(x, y)$ et $H(x, z)$. Nous avons donc une relation d'équivalence en dehors de Z . $\square$

Preuve du cas méromorphe du théorème 4.2.2. – On suppose que le groupeïde de Galois est d'ordre 0. Soit H une équation de l'idéal $\mathcal{I}_0$ donnée par le lemme 4.2.3 et Z le sous ensemble analytique en dehors duquel on a la stabilité du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie par composition. Quitte à agrandir Z , nous supposons qu'il contient le lieu singulier du feuilletage. On note R le lieu des zéros de H dans $(\Delta \times \Delta)$ et $R|_{\Delta-Z}$ sa restriction sur $(\Delta - Z) \times (\Delta - Z)$. Montrons que le quotient de $(\Delta - Z)$ par $R|_{\Delta-Z}$ est une surface de Riemann.

Par transitivité, les classes d'équivalence $pr_2(pr_1^{-1}(p) \cap R|_{\Delta-Z})$ sont constantes le long des feuilles du feuilletage. Les projections $R|_{\Delta-Z}$ sur $\Delta - Z$ étant sans torsion (voir le lemme 1.1.3), elles sont plates au-dessus d'une transverse en p au feuilletage. Par transitivité elles sont plates sur un ouvert contenant p . D'après [Fr] elles sont ouvertes et en particulier le saturé pour $R|_{\Delta-Z}$ d'un ouvert est un ouvert.

Pour prouver la séparabilité du quotient, on prend deux points p et q non équivalents. Soit T une transverse au feuilletage en p . Le point (4) du théorème 2.1.4 nous assure que les classes d'équivalence de p et de q intersectent T en un nombre fini de points. On peut donc séparer ces deux ensembles par des ouverts dans T saturés pour la relation d'équivalence restreinte à T . Les saturés de ces ouverts donnent deux ouverts dans le quotient qui ne s'intersectent pas. Le quotient par $R|_{\Delta-Z}$ est un espace topologique séparé.

La construction d'un atlas holomorphe de cartes locales sur cet espace se fait de la manière suivante. Au voisinage U d'un point p de $\Delta - Z$, il existe une fonction

holomorphe h constante sur les classes d'équivalence. On prolonge h sur le saturé $\overline{U} = pr_2(pr_1^{-1}(U) \cap R|_{\Delta-Z})$ du voisinage par $pr_{2*}(pr_1^*(h)|_{R|_{\Delta-Z}})$. Ceci nous définit une carte sur l'ouvert $\overline{U}$ du quotient. Soient $(h_1, \overline{U}_1)$ et $(h_2, \overline{U}_2)$ deux cartes d'intersection non vide. Les applications $h_1|_{\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2}$ et $h_2|_{\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2}$ ont les mêmes hypersurfaces de niveau. Il existe une application holomorphe F telle que $h_1|_{\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2} = F \circ h_2|_{\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2}$. Celle-ci définit un changement de carte holomorphe pour la variété quotient.

On note alors S la surface de Riemann obtenue et $\pi : \Delta - Z \rightarrow S$ le passage au quotient. Montrons que quitte à rajouter des points à S , π se prolonge à $\Delta - \text{Sing}\mathcal{F}$. Si une composante irréductible de Z est transverse au feuilletage, π étant constante sur les feuilles, elle se prolonge à cette composante. Sinon, considérons une transverse T au feuilletage en un point p de cette composante. D'après le (4) du théorème 2.1.4, il existe une coordonnée source x sur T et but X sur T dans laquelle l'équation H sur $T \times T$ s'écrit $X^k - x^k = 0$. Au voisinage de p le passage au quotient est donné par :

$$\begin{aligned} \pi : \quad T - \{p\} &\rightarrow S \\ x &\mapsto x^k. \end{aligned}$$

Le quotient π admet donc un prolongement holomorphe sur Z .

Notons encore S l'image de ce prolongement. Si cette surface est ouverte, elle porte des fonctions holomorphes et l'image inverse de l'une de ces fonctions par π définit une intégrale première du feuilletage sur $\Delta - \text{Sing}\mathcal{F}$. Comme $\text{Sing}\mathcal{F}$ est supposé de codimension deux, elle se prolonge en une intégrale première holomorphe du feuilletage. Si la surface de Riemann S est compacte, elle admet des fonctions méromorphes non constantes qui par image inverse et prolongement à $\text{Sing}\mathcal{F}$ donnent des intégrales premières méromorphes du feuilletage.

Réciproquement si $\mathcal{F}$ admet une intégrale première méromorphe, le groupoïde d'invariance de celle-ci est un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ d'ordre zéro : voir l'exemple 1.2.3. $\square$

Précisons maintenant la condition nécessaire et suffisante sur l'équation d'ordre zéro H du groupoïde de Galois pour que le feuilletage admette une intégrale première holomorphe.

Proposition 4.2.5 *Lorsque le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est non transitif d'équation H , le feuilletage admet une intégrale première holomorphe si et seulement si $H(0, y)$ est non identiquement nulle.*

Preuve. – Si $H(0, y)$ est non identiquement nulle, nous pouvons supposer que H est non identiquement nulle le long de l'axe des y_n et appliquer le théorème de préparation de Weierstrass afin d'écrire :

$$H(x, y) = y_n^k + a_{k-1}(x, \overline{y})y_n^{k-1} + \dots + a_0(x, \overline{y})$$

où $\overline{y} = (y_1, \dots, y_{n-1})$. Fixons deux points x et y en dehors de Z tels que $H(x, y) = 0$. En utilisant la transitivité de la relation d'équivalence, $H(x, y) = 0$ implique qu'au

voisinage de tout $z \in \Delta - Z$ il existe une unité $u(z)$ telle que $H(x, z) = u(z)H(y, z)$. Grâce aux normalisations de Weierstrass des polynômes $H(x, z)$ et $H(y, z)$ on obtient $a_0(x, \bar{z}) = a_0(y, \bar{z})$ pour tout $\bar{z}$. En particulier on a $a_0(x, 0) = a_0(y, 0)$. Cette fonction est non constante. En effet par symétrie, il existe une unité v telle que $H(x, y) = v(x, y)H(y, x)$ d'où

$$a_0(x, 0) = H(x, 0) = v(x, 0)H(0, x) = v(x, 0)(x_n^k + \dots).$$

Les feuilles de $\mathcal{F}$ étant incluses dans les classes d'équivalence de la relation d'équivalence donnée par H , la fonction holomorphe $a_0(x, 0)$ est une intégrale première du feuilletage.

Réciproquement, si le feuilletage admet une intégrale première holomorphe non constante $h(x)$, l'équation $h(x) - h(y)$ définit un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie contenant le groupoïde de Galois du feuilletage. Les zéros de $H(x, y)$ sont donc inclus dans ceux de $h(x) - h(y)$. En particulier pour $x = 0$ ceci montre que $H(0, y)$ est non identiquement nulle. $\square$

Les preuves des autres cas du théorème 4.2.2 (rang transverse 1, 2 ou 3) se déduisent du théorème 4.1.2 et du théorème ci-dessous :

Théorème 4.2.6 *Un germe de feuilletage holomorphe singulier $\mathcal{F}$ de codimension un admet une intégrale première de type Darboux (resp. Liouville ou Riccati) si et seulement s'il admet une suite de Godbillon-Vey de longueur un (resp. deux ou trois).*

Preuve. – Le cas Liouvillien est dû à M. Singer : [Si]. Sa généralisation au cas Riccati est faite dans [Cas1]. Dans la section suivante, nous donnons des preuves de ces deux théorèmes ainsi que du cas Darboux. Ceci achèvera la preuve de théorème. On pourra aussi consulter [P-S]. $\square$

4.3 Un théorème de Singer et ses généralisations

Dans ce paragraphe nous nous placerons dans le cadre légèrement plus abstrait de l'algèbre différentielle.

Notation M est un corps différentiel de caractéristique nulle, de dérivations $\partial_1, \dots, \partial_l$ qui commutent et sont linéairement indépendantes. Le dual du M -module des dérivations sera Ω_M^1 le M -module des 1-formes différentielles de M . Soit K une extension différentielle de M ; nous noterons $\Omega_K^1 = K \otimes_M \Omega_M^1$.

4.3.1 Introduction

Proposition 4.3.1 *Etant donnée une équation aux dérivées partielles $dG + \frac{G^n}{n!}\gamma_n + \dots + \gamma_0 = 0$ avec γ_i dans Ω_K^1 , si cette équation admet une solution G dans une extension différentielle de K et si G est transcendante sur K alors les γ_i forment une suite de Godbillon-Vey pour γ_0 .*

Preuve. – L'existence d'une solution implique que

$$0 = ddG = \sum_i G^i \left(\frac{d\gamma_i}{i!} - \sum_{p+q=i} \frac{\gamma_p \wedge \gamma_{q+1}}{p!q!} \right)$$

Si cette solution est transcendante, nous obtenons une suite de Godbillon-Vey de longueur $n+1$ pour γ_0 . $\square$

Plus précisément, nous nous intéresserons aux formes ω admettant des suites de Godbillon-Vey de longueur 1, 2 ou 3. Une intégrale première de ω est un élément H d'une extension différentielle de M vérifiant $dH \wedge \omega = 0$.

Les relations entre l'existence d'une suite de Godbillon-Vey de longueur finie et l'existence d'une intégrale première d'un type de transcendance particulier ont été étudiées par M. Singer dans [P-S] et [Si] où il montre entre autre le théorème 4.2.6 (2). Nous allons montrer les théorèmes suivant.

Théorème 4.2.6 (1) *Une forme ω dans Ω_M^1 admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 1 sur M si et seulement si elle admet une intégrale première de type Darboux.*

Théorème 4.2.6 (2) *Une forme ω dans Ω_M^1 admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur M si et seulement si elle admet une intégrale première Liouvillienne.*

Théorème 4.2.6 (3) *Une forme ω dans Ω_M^1 admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur M si et seulement si elle admet une intégrale première de type Riccati.*

Dans sa thèse [Tou1], F. Touzet donne une preuve plus élémentaire du second théorème du à J.P. Rolin. Nous nous proposons de démontrer le théorème 4.2.6 (1) puis de redémontrer dans un deuxième temps le théorème 4.2.6 (2) en utilisant la proposition 4.3.1. Enfin nous étendrons ces résultats aux suites de longueur 3 :

4.3.2 Preuve du théorème 4.2.6 (1)

Supposons qu'il existe une intégrale première H de type Darboux pour la forme ω . On note $K \subset K_1 \dots \subset K_n$ la suite des extensions du corps K , telle que H soit dans K_n . On supposera que cette suite est de longueur minimale parmi toutes les suites d'extensions de type Darboux nécessaires à la construction d'une intégrale première.

L'extension $K_{n-1} \subset K_n$ ne peut pas être algébrique. Dans le cas contraire, H serait algébrique sur K_{n-1} . On note $P(X) = X^p + a_{p-1}X^{p-1} \dots + a_0$ son polynôme minimal ; H n'étant pas constante, il en serait de même pour au moins un des a_i . On aurait

$$0 = dP(H) \wedge \omega = \sum_i H^i da_i \wedge \omega$$

d'où par minimalité de P , $da_i \wedge \omega = 0$. L'existence des intégrales premières a_i dans K_{n-1} contredit la minimalité de la suite d'extensions. La dernière extension est donc transcendante.

Soit G telle que $K_n = K_{n-1}(G)$ où $dG = \gamma$ est une forme à coefficients dans K_{n-1} . Lorsqu'on écrit $dH = F\omega$ dans K_n , on peut supposer que le facteur intégrant F est dans K_{n-1} . En effet, en écrivant $F = a_k G^k + \dots$ par division suivant les puissances croissantes de G et en calculant $d(F\omega)$, par transcendance de G on obtient $d(a_k \omega) = 0$. On peut donc considérer la suite de longueur minimale donnée par les K_i pour i inférieur à $n-1$ et $K_n = K_{n-1}(H)$ avec $dH = a_k \omega$. Il existe donc un facteur intégrant pour ω dans l'avant-dernier corps de la suite d'extension donnant une intégrale première de type Darboux.

Si l'extension K_{n-1} de K_{n-2} est purement transcendante, le même raisonnement assure l'existence d'un facteur intégrant pour ω dans K_{n-2} , ce qui contredit la minimalité de la suite. L'extension K_{n-1} de K_{n-2} est donc algébrique.

Soit F un facteur intégrant de ω dans K_{n-1} . Il est algébrique sur K_{n-2} . On note $F_1, \dots, F_p$ ses quantités conjuguées. Comme $d(F_i \omega) = 0$, on a

$$\frac{d(F_1 \dots F_p)}{F_1 \dots F_p} \wedge \omega = p d\omega.$$

Le produit $\tilde{F} = F_1 \dots F_p$ est un élément non nul de K_{n-2} dont une racine p -ième $\sqrt[p]{\tilde{F}}$ est un facteur intégrant pour ω . On construit donc une nouvelle suite de longueur minimale en conservant les $n-2$ premières extensions et en remplaçant K_{n-1} par $K_{n-2}(\sqrt[p]{\tilde{F}})$ et K_n par $K_{n-2}(\sqrt[p]{\tilde{F}}, H)$ avec $dH = \sqrt[p]{\tilde{F}} \omega$. Montrons que cette suite est de longueur deux, c'est-à-dire $K_{n-2} = K_0$.

Si l'extension K_{n-2} de K_{n-3} est algébrique, le raisonnement précédent permet de construire une fonction $\tilde{F}$ dans K_{n-3} dont une racine est un facteur intégrant pour ω . On pourrait alors construire une suite de longueur $n-1$ qui contredirait la minimalité de la suite.

Si l'extension $K_{n-2} = K_{n-3}(G)$ est transcendante avec dG à coefficients dans K_{n-3} . On écrit $\tilde{F} = a_k G^k (1 + a_1 G^{-1} + \dots)$. En faisant la division suivant les puissances décroissantes, on a

$$\frac{d\tilde{F}}{\tilde{F}} \wedge \omega = \frac{da_k}{a_k} \wedge \omega + k \frac{dG \wedge \omega}{G} + \frac{d(a_1 G^{-1} + \dots)}{(1 + a_1 G^{-1} \dots)} \wedge \omega.$$

Le dernier terme de la somme contient des puissances de G inférieures ou égales à -1 . Le deuxième terme est de degré -1 en G . Par transcendance de G on en déduit que $\frac{da_k}{a_k} \wedge \omega = p d\omega$. A partir du facteur intégrant $\sqrt[p]{a_k}$ on construit une suite d'extensions de longueur $n-1$ contenant une intégrale première. Ceci contredit à nouveau la minimalité de la suite.

On a obtenu une suite de longueur deux $K_0 \subset K_1 \subset K_2$ avec $K_1 = K_0(\sqrt[p]{\tilde{F}})$ et $K_2 = K_1(H)$ où $dH = \sqrt[p]{\tilde{F}} \omega$: il existe un élément de K dont une racine est un facteur intégrant pour ω .

Réciproquement, une suite de Godbillon-Vey de longueur un permet par ces formules de construire une intégrale première de type Darboux pour ω . $\square$

4.3.3 Une nouvelle preuve du théorème de M. Singer

Lemme 4.3.2 *Soient $\omega \in \Omega_M^1$, $M \subset K \subset K_1$ telle que K_1 soit algébrique sur K . Si ω admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur K_1 alors elle en admet une sur K .*

Preuve. – Soit $\widetilde{K}_1$ la cloture normale de K_1 . En faisant agir un élément $\sigma \in \text{Gal}(\widetilde{K}_1/K)$ sur les relations de la suite de Godbillon-Vey, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge \sigma(\omega_1) \\ \sigma(d\omega_1) &= d(\sigma(\omega_1)) = 0. \end{aligned}$$

La moyenne des $\sigma(\omega_1)$ pour tous les σ dans $\text{Gal}(\widetilde{K}_1/K)$ nous fournit une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 dans K . $\square$

Lemme 4.3.3 *Soient $\omega \in \Omega_M^1$ et $K(G)$ une extension de $K \supset M$ par G vérifiant $dG = G\gamma_1 + \gamma_0$. Si ω admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur $K(G)$ alors elle en admet une sur K .*

Preuve. – Nous pouvons supposer que G est transcendante sur K et écrire ω_1 sous la forme $\frac{N(G)}{D(G)}$ avec $N \in \Omega_K^1[X]$ et $D \in K[X]$. Nous allons distinguer deux cas suivant que le degré de D est positif ou nul.

1) - Le degré de D est positif.

Le lemme 4.3.2 nous permet de supposer que le corps K contient une racine g de D . Nous nous plaçons en cette racine en faisant le changement d'inconnue $H = G - g$. Comme

$$dH = H\gamma_1 + g\gamma_1 + \gamma_0 - dg = H\widetilde{\gamma}_1 + \widetilde{\gamma}_0,$$

la transcendance de H sur K assure que $\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1$ forment une suite de Godbillon-Vey. La forme ω_1 est une expression rationnelle en H et en effectuant la division suivant les puissances croissantes nous obtenons $\omega_1 = \frac{1}{H^n}\alpha_{-n} + \dots$ avec $n > 0$ et $\alpha_i \in \Omega_K^1$. L'équation $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ implique que $d\omega = \omega \wedge \alpha_0$ et $\omega \wedge \alpha_{-n} = 0$ et l'équation $d\omega_1 = 0$ implique que $\alpha_{-n} \wedge \widetilde{\gamma}_0 = 0$ et $d\alpha_0 + \alpha_1 \wedge \widetilde{\gamma}_0 = 0$. Si $\widetilde{\gamma}_0$ est non nulle, nous en déduisons que ω est un multiple de $\widetilde{\gamma}_0$ donc la suite de Godbillon-Vey sur K de $\widetilde{\gamma}_0$ en fournit une pour ω . Si $\widetilde{\gamma}_0$ est nulle, α_0 convient.

2) - Le degré de D est nul.

Dans ce cas, $\omega_1 = G^r\alpha_r + \dots + \alpha_0$. L'équation $d\omega = \omega \wedge \omega_1$ implique que $\omega \wedge \alpha_r = 0$ donc qu'il existe $F \in K$ telle que $\alpha_r = F\omega$. L'équation $d\omega_1 = 0$ implique que $d\alpha_r + r\alpha_r \wedge \widetilde{\gamma}_1 = 0$. Un multiple de ω admet une suite de Godbillon-Vey sur K de longueur 2, il en est donc de même pour ω . $\square$

Preuve du théorème 4.2.6 (2). – Soit H une intégrale première de ω dans un corps K extension Liouvillienne de M . Par définition il existe F dans K tel que $dH = F\omega$ d'où $d\omega = \omega \wedge \frac{dF}{F}$, $\omega_1 = \frac{dF}{F}\omega$ est une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur K pour ω . Par récurrence sur la longueur de l'extension, le lemme 4.3.3, nous permet de trouver une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 sur M . Réciproquement, à partir d'une suite de Godbillon-Vey ω, ω_1 de longueur 2 on construit une intégrale première de ω en résolvant successivement les équations $dF = F\omega_1$ puis $dH = F\omega$. $\square$

4.3.4 Suite de Godbillon-Vey de longueur 3

Lemme 4.3.4 *Soient $\omega \in \Omega_M^1$ et K une extension de M . Si elle admet une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur K alors, parmi toutes ses suites de Godbillon-Vey, elle en admet une de la forme $\omega, \omega_1, \omega_2$ avec $\omega_1 \in \Omega_M^1$.*

Preuve. – Soient η_1 et η_2 dans Ω_K^1 vérifiant :

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge \eta_1 \\ d\eta_1 &= \omega \wedge \eta_2 \\ d\eta_2 &= \eta_1 \wedge \eta_2 \end{aligned}$$

Prenons une dérivation X sur M vérifiant $\omega(X) = 1$ et posons $\omega_1 = L_X\omega$. Il faut ensuite construire ω_2 . Comme $(\omega_1 - \eta_1) \wedge \omega = 0$, il existe $F \in K$ telle que $\omega_1 = \eta_1 + F\omega$. En prenant la différentielle on a $d\omega_1 = \omega \wedge (\eta_2 - dF + F\omega_1)$. La forme ω_2 est donc de la forme $\eta_2 - dF + F\omega_1 + G\omega$ pour un certain G dans K . Il faut déterminer le G tel que la troisième équation soit satisfaite. En calculant

$$d\omega_2 - \omega_1 \wedge \omega_2 = d(G\omega) + Fd(F\omega) + Gd\omega,$$

on obtient $G = -\frac{1}{2}F^2$ donc $\omega_2 = \eta_2 - dF + F\omega_1 - \frac{F^2}{2}\omega$ convient. $\square$

Lemme 4.3.5 *Soient $\omega \in \Omega_M^1$, $M \subset K \subset K_1$ telle que K_1 soit algébrique sur K . Si ω admet une suite de longueur 3 sur K_1 alors elle en admet une sur K .*

Preuve. – Le lemme 4.3.4 nous permet de supposer que $\omega_1 \in \Omega_M^1$. Maintenant la preuve est la même que celle du lemme 4.3.2. Soit $\widetilde{K}_1$ la clôture normale de K_1 . En faisant agir un élément $\sigma \in \text{Gal}(\widetilde{K}_1/K)$ sur les relations de la suite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\omega &= \omega \wedge \sigma(\omega_1) &= \omega \wedge \omega_1 \\ d\omega_1 &= d\sigma(\omega_1) &= \omega \wedge \sigma(\omega_2) \\ d\sigma(\omega_2) &= \sigma(\omega_1) \wedge \sigma(\omega_2) &= \omega_1 \wedge \sigma(\omega_2) \end{aligned}$$

La moyenne des $\sigma(\omega_2)$ pour tous les σ dans $\text{Gal}(\widetilde{K}_1/K)$ nous fournit une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 dans K . $\square$

Lemme 4.3.6 *Soient $\omega \in \Omega_M^1$ et $K(G)$ une extension de $K \supset M$ par G vérifiant $dG = \frac{G^2}{2}\gamma_2 + G\gamma_1 + \gamma_0$ avec γ_2, γ_1 et γ_0 dans Ω_K^1 . Si ω admet une suite de longueur 3 sur $K(G)$, alors elle en admet une sur K .*

Preuve. – Grâce aux lemmes précédents, nous pouvons supposer que G est transcendante sur K , $\omega_1 \in \Omega_M^1$, $\omega_2 = \frac{N(G)}{D(G)}$ avec $N \in \Omega_K^1[X]$ et $D \in K[X]$, et que les racines de D se trouvent dans K . Nous distinguerons les deux mêmes cas que précédemment.

1) - Le degré de D est non nul.

A un changement de variable près nous pouvons supposer qu'après division suivant les puissances croissantes $\omega_2 = \frac{1}{G^n}\beta_{-n} + \dots$ avec $\beta_i \in \Omega_K^1$ et $n > 0$. L'équation $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ implique $\omega \wedge \beta_{-n} = 0$, il existe donc $F \in K$ telle que $\beta_{-n} = F\omega$.

Si γ_0 est non nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\gamma_0 \wedge \beta_{-n} = 0$. La forme ω est un multiple de γ_0 et on obtient une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 pour ω à partir de celle de γ_0 .

Si γ_0 est nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $d\beta_{-n} - n\beta_{-n} \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \beta_{-n}$. En remplaçant β_{-n} par $F\omega$ dans cette expression on obtient $d\omega = \omega \wedge \left(\frac{dF}{2F} + \frac{n\gamma_1}{2}\right)$, c'est-à-dire une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 dans K .

2) - Le degré de D est nul.

Dans ce cas $\omega_2 = G^r\beta_r + \dots + \beta_0$. L'équation $d\omega_1 = \omega \wedge \omega_2$ implique $\omega \wedge \beta_r = 0$. Si γ_2 est non nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $\gamma_2 \wedge \beta_r = 0$. La forme ω est un multiple de γ_2 et on a ainsi une suite pour ω . Si γ_2 est nulle, l'équation $d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_2$ implique $d\beta_r + r\beta_r \wedge \gamma_1 = \omega_1 \wedge \beta_r$. En remplaçant β_r par $F\omega$ dans cette expression on obtient une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 : $d\omega = \omega \wedge \left(\frac{dF}{2F} - \frac{r\gamma_1}{2}\right)$. $\square$

Preuve du théorème 4.2.6 (3). – Soit H une intégrale première de ω dans un corps K , extension de type Riccati de M . Il existe une suite de Godbillon-Vey de longueur 2 pour ω sur K . En utilisant le lemme 4.3.6, par récurrence, nous obtenons une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur M . Inversement, à partir d'une suite de Godbillon-Vey de longueur 3 sur M $\omega, \omega_1, \omega_2$, on construit une intégrale première de ω en résolvant $dG = \frac{G^2}{2}\omega_2 + G\omega_1 + \omega$ puis $dF = F(\omega_1 + \frac{2}{G}\omega)$ et $dH = F\omega$. $\square$

4.4 Groupoïdes de Galois et extensions fortement normales

Dans cette section $\mathcal{M}_\Delta$ désigne le corps des fonctions méromorphes sur le polydisque Δ de $\mathbb{C}^n$. Considérons l'espace $J_k^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})$ des jets d'ordre k d'applications submersive de Δ dans $\mathbb{C}$ (la notation $*$ désigne ici la propriété de submersivité). Le choix de coordonnées x sur Δ et H sur $\mathbb{C}$ nous permet d'identifier cet espace à un ouvert de $\Delta \times \mathbb{C} \times_{|\alpha| \leq k} \mathbb{C}^\alpha$ avec les coordonnées H^α naturellement associées au choix de x et de H . Ces espaces sont munis de l'anneau des équations aux déri-

vées partielles d'ordre inférieur à k , $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})} = \mathcal{O}_\Delta[H, \dots, H^\alpha \dots]$ et pour chaque dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_i}$ d'une dérivation $D_i : \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})} \rightarrow \mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})}$.

Définition 4.4.1 Une $\mathcal{D}$ -variété dans $J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}) = \varprojlim J_k^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})$ est donnée par un idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})} = \varinjlim \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C})}$ différentiel et réduit tel que $\mathcal{J} \cap \mathcal{O}_\Delta = \emptyset$.

Définition 4.4.2 Soit $\mathcal{A}$ un anneau différentiel sur $\mathcal{M}_\Delta$. Le spectre différentiel est l'ensemble $\text{Spec}^{\text{diff}}(\mathcal{A})$ des idéaux premiers et différentiels de $\mathcal{A}$.

Cet ensemble peut être muni d'une topologie appelée topologie de Zariski-Kolchin ([Bu2], [Kov]). Nous allons étudier dans cette partie la $\mathcal{D}$ -variété des intégrales premières d'un germe de feuilletage $\mathcal{F}$ défini par des formes $\omega_1, \dots, \omega_q$. Elle est donnée par le système d'équations aux dérivées partielles $dH_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q = 0$. Considérons l'anneau différentiel

$$\mathcal{M}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} / (dH_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q)$$

où $(dH_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q)$ est l'idéal différentiel réduit engendré par les composantes de ces $(q+1)$ -formes pour i entre 1 et q , et notons $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ son localisé sur $dH_1 \wedge \dots \wedge dH_q \neq 0$.

L'ensemble $\text{Spec}^{\text{diff}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ représente l'ensemble des systèmes d'équations aux dérivées partielles compatibles avec le fait d'être un système complet d'intégrales premières. La notion de réductibilité d'un système d'équations aux dérivées partielles de Jules Drach ([Dr1]) correspond à la non trivialité du spectre différentiel.

Définition 4.4.3 ([Bu1],[Ko], [Kov]) Soit $\mathcal{M}_\Delta \subset \mathcal{K}$ une extension de degré de transcendance fini de corps différentiels. Cette extension sera dite fortement normale si pour toute extension différentielle $\mathcal{E}$ de $\mathcal{K}$ et tout morphisme $\sigma : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{E}$ au-dessus de $\mathcal{M}_\Delta$:

1. σ laisse les constantes de $\mathcal{K}$ invariantes,
2. $\sigma(\mathcal{K}) \cdot \mathcal{E}^c = \mathcal{K} \cdot \mathcal{E}^c$

où $\mathcal{E}^c$ désigne le corps des constantes de $\mathcal{E}$ et le point désigne le compositum des corps dans $\mathcal{E}$.

D'après la théorie de Kolchin (voir [Ko] et [Kov]), le groupe de Galois de ces extensions est un groupe algébrique. Ses sous-groupes algébriques sont en correspondance avec les extensions différentielles intermédiaires.

Le théorème suivant confirme les résultats incomplets de J. Drach [Dr2] et s'inscrit dans "une théorie générale de la réductibilité des équations" esquissée par E. Vessiot [Ves1], [Ves2].

Théorème 4.4.4 Soit $\mathcal{F}_\omega$ un feuilletage de codimension un de $(\mathbb{C}^n, 0)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}_\omega$ est propre ;

- (2) le spectre différentiel de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est non trivial : $\text{Spec}^{\text{diff}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}}) \neq \{0\}$;
 (3) il existe une intégrale première de $\mathcal{F}$ dans une extension fortement normale $\mathcal{K}$ de $\mathcal{M}_{\Delta}$.

Nous démontrerons successivement les implications (3) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (1) et (1) $\Rightarrow$ (3) dans les lemmes suivants. Nous montrerons les deux premières pour un feuilletage de codimension quelconque.

Lemme 4.4.5 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage donné par q 1-formes. Si il existe q intégrales premières fonctionnellement indépendantes dans une extension différentielle de $\mathcal{M}_{\Delta}$ de degré de transcendance fini alors le spectre différentiel de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est non trivial.*

Preuve. – L'existence d'un système d'intégrales premières dans $\mathcal{K}$ donne un morphisme différentiel au-dessus de $\mathcal{M}_{\Delta}$:

$$\mathcal{O}_{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{K}$$

induit par l'identification des coordonnées H_i avec les intégrales premières. Le noyau de ce morphisme est un idéal différentiel premier de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ et donne donc un élément de $\text{Spec}^{\text{diff}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$. L'extension $\mathcal{K}$ étant de degré de transcendance fini ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$, le morphisme ne peut pas être injectif. L'élément obtenu dans $\text{Spec}^{\text{diff}}(\mathcal{O}_{\mathcal{F}})$ est non trivial. $\square$

Lemme 4.4.6 *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage donné par q 1-formes. Si le spectre différentiel de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ est non trivial alors le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}_{\omega}$ est propre.*

Preuve. – Soit $\mathcal{J}$ un idéal différentiel premier de $\mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)}$ contenant l'idéal différentiel donné par $dH_i \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_q$. Nous allons construire un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie dont les solutions sont les germes φ tels que pour tout $H = (H_1, \dots, H_q)$, H est solution de $\mathcal{J}$ si et seulement si $H \circ \varphi$ est solution de $\mathcal{J}$. Pour cela on considère l'action de $J_p^*(\Delta)$ sur $J_p^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)$ par composition à la source :

$$\text{comp} : J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q) \times_{\Delta} J^*(\Delta) \longrightarrow J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q).$$

Cette action se traduit sur les anneaux par l'existence d'une flèche comp^* satisfaisant les diagrammes commutatifs suivant :

– l'identité

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} & \xrightarrow{\text{comp}^*} & \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} \otimes_{\mathcal{O}_{\Delta}} \mathcal{O}_{J^*(\Delta)} \\ & \searrow = & \downarrow 1 \otimes e^* \\ & & \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} \end{array}$$

– la composition

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} & \xrightarrow{\text{comp}^*} & \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J^*(\Delta)} \\
 \text{comp}^* \downarrow & & \downarrow 1 \otimes c^* \\
 \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J^*(\Delta)} & \xrightarrow{\text{comp}^* \otimes 1} & \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)} \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J^*(\Delta)} \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J^*(\Delta)}
 \end{array}$$

Un germe de difféomorphisme $\varphi : (\Delta, a) \rightarrow (\Delta, b)$ induit un transport par le prolongement φ^* (voir la définition 1.1.1) des jets de $J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)$ de source b sur ceux de source a par composition. Étant donné un idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_{J_p^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)}$, nous allons chercher à déterminer les équations différentielles satisfaites par les germes φ tels que $\varphi^{**}(\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}_a) = (\mathcal{J} \otimes \mathbb{C}_b)$ (on note φ^{**} le morphisme d'anneau induit par la transformation φ^*). Considérons l'idéal $\text{comp}^* \mathcal{J}$ dont les solutions sont l'ensemble des couples (H, φ) tels que $H \circ \varphi$ est solution de $\mathcal{J}$. Les solutions de $\text{comp}^* \mathcal{J} + \mathcal{J} \otimes 1$ sont les couples (H, φ) tels que H et $H \circ \varphi$ soient solutions de $\mathcal{J}$. Il faut déterminer le plus petit idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_{J^*(\Delta)}$ vérifiant $\text{comp}^* \mathcal{J} + \mathcal{J} \otimes 1 \subset \mathcal{J} \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{I}$ en dehors d'une hypersurface. Les solutions de $\mathcal{I}$ sont les φ tels que si H est solution de $\mathcal{J}$ alors $H \circ \varphi$ est solution de $\mathcal{J}$.

Nous allons déterminer un système de générateurs de l'idéal $\mathcal{I}$. En l'absence de torsion, nous noterons encore $\mathcal{J}$ l'idéal engendré par $\mathcal{J}$ dans $\mathcal{M}_\Delta \otimes \mathcal{O}_{J^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)}$. D'après le théorème de "noetherianité" 1.1.9, il existe un entier k tel que l'idéal $\mathcal{J}$ soit différentiablement engendré, en tant qu'idéal réduit, par ses éléments d'ordre inférieur à p . On note $\mathcal{J}_p$ la trace de l'idéal $\mathcal{J}$ dans l'anneau des équations différentielles d'ordre inférieur ou égale à p .

Soit $f_1, \dots, f_n$ un système générateur de l'idéal $\mathcal{J}_p$, qu'on supposera $\mathcal{M}_\Delta$ -libre. On le complète en une base du $\mathcal{M}_\Delta$ -espace vectoriel $\mathcal{J}_p : f_1, \dots, f_n, \dots, f_m, \dots$. Puis on complète cette famille par des $e_1, \dots, e_k, \dots$ en une $\mathcal{M}_\Delta$ -base de $\mathcal{M}_\Delta \otimes \mathcal{O}_{J_p^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)}$. Soit $f \in \mathcal{M}_\Delta \otimes \mathcal{O}_{J_p^*(\Delta \rightarrow \mathbb{C}^q)}$, nous noterons :

$$\text{comp}^* f = \sum f_j \alpha^j(f) + \sum e_k \beta^k(f),$$

avec les $\alpha^j(f)$ et $\beta^k(f)$ dans $\mathcal{M}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J_p^*(\Delta)}$. On considère alors l'idéal $\mathcal{I}_p$ de $\mathcal{M}_\Delta \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$ défini par les $\beta^k(f)$ pour $f \in \mathcal{J}_p$. Par construction cet idéal vérifie deux propriétés importantes.

- (a) Il est engendré par les $\beta^k(f_i)$ pour $i = 1, \dots, n$. En effet, on a clairement $\beta^k(f + g) = \beta^k(f) + \beta^k(g)$. D'autre part comme

$$\text{comp}^*(fg) \equiv \sum e_\ell e_k \beta^\ell(f) \beta^k(g) \pmod{\mathcal{J}_p \otimes 1}$$

en écrivant $e_\ell e_k$ dans la base décrite au-dessus, on obtient que $\beta^i(fg)$ est une combinaison des $\beta^\ell(f) \beta^k(g)$ à coefficients dans $\mathcal{M}_\Delta$. En particulier, quel que soit f dans $\mathcal{J}_p$, $\beta^k(f)$ est dans l'idéal engendré par les $\beta^k(f_i)$ pour $i = 1, \dots, n$.

- (b) En considérant la décomposition de $\text{comp}^* f_i$ on remarque que, pour tout φ de $J_p^*(\Delta)$ solution de $\mathcal{I}_p$, si H est solution de $\mathcal{J}_p$ alors $H \circ \varphi$ est aussi solution de $\mathcal{J}_p$. Réciproquement si pour toute solution H de $\mathcal{J}_p$, $H \circ \varphi$ est encore solution de $\mathcal{J}_p$ alors, en utilisant l'indépendance des e_k , on a φ solution de $\mathcal{I}_p$. Un jet φ est solution de $\mathcal{I}_p$ si et seulement si $\varphi^{**} \mathcal{J}_p \otimes \mathbb{C}_a \subset \mathcal{J}_p \otimes \mathbb{C}_b$.

Vérifions maintenant que cet idéal vérifie les propriétés (1) et (3) d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie. L'inclusion de cet idéal dans l'idéal définissant l'identité se déduit du diagramme commutatif de l'identité ci-dessus. D'autre part on a :

$$\begin{aligned} (\text{comp}^* \otimes 1)(\text{comp}^*)(f) &= \sum_{i,j} f_i \alpha^i(f_j) \alpha^j(f) \sum_{l,j} e_l \beta^l(f_j) \alpha^j(f) \\ &\quad + \sum_{i,k} f_i \alpha^i(e_k) \beta^k(f) + \sum_{k,l} e_l \beta^l(e_k) \beta^k(f) \end{aligned}$$

et

$$(1 \otimes c^*)(\text{comp}^*)(f) = \sum f_i c^*(\alpha^i(f)) + \sum e_l c^*(\beta^l(f)).$$

En utilisant le second diagramme commutatif, on obtient les égalités

$$c^*(\beta^l(f_i)) = \sum_k \beta^l(e_k) \beta^k(f_i) + \sum_j \beta^l(f_j) \alpha^j(f_i)$$

qui prouvent la stabilité par composition. N'ayant pas de stabilité par l'inversion i , considérons l'idéal $\mathcal{I}_p + i^* \mathcal{I}_p$. Par construction il est stable par inversion et reste contenu dans l'idéal de l'identité. Nous venons de prouver qu'une partie de cet idéal est stable par composition. Pour prouver que l'autre partie l'est aussi on introduit l'application $i \hat{\times} i$ définie de $J^*(\Delta) \times_{\Delta} J^*(\Delta)$ dans $J^*(\Delta) \times_{\Delta} J^*(\Delta)$ par :

$$((x, y, \dots), (y, z, \dots)) \rightarrow ((z, y, \dots), (y, x, \dots)).$$

Cette flèche induit un morphisme $(i \hat{\times} i)^*$ vérifiant $(i \hat{\times} i)^* c^* = c^* i^*$. En l'appliquant à l'égalité donnant la stabilité par composition de $\mathcal{I}_p$, on a :

$$c^*(i^*(\beta^l(f_i))) = \sum_k i^*(\beta^k(f_i)) i^*(\beta^l(e_k)) + \sum_j i^*(\alpha^j(f_i)) i^*(\beta^l(f_j))$$

ce qui prouve la stabilité par composition de $\mathcal{I}_p + i^* \mathcal{I}_p$. Quitte à multiplier par les dénominateurs des $\beta^l(f_j)$, l'idéal $\mathcal{I}_p + i^* \mathcal{I}_p$ est inclus dans $\mathcal{O}_{J_p^*(\Delta)}$. Nous venons de prouver qu'il décrit donc un sous-groupoïde de Lie de $J_p^*(\Delta)$, la stabilité par composition n'étant vérifiée qu'en dehors du lieu des zéros de ces dénominateurs. Le théorème de prolongement de B. Malgrange [Ma5] assure que l'idéal réduit qu'il engendre différentiablement donne un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie.

Vérifions que ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est admissible pour le feuilletage. Les automorphismes locaux du feuilletage qui se factorisent en l'identité sur la transverse agissent comme l'identité sur $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ donc laissent invariants tous ses idéaux différentiels. Ils sont

donc tous solutions du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie que nous venons de construire. Vérifions enfin que ce $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie est propre. On choisit des coordonnées transverses t et des coordonnées tangentes z . Les équations d'intégrales premières s'écrivent localement $\frac{\partial H_i}{\partial z_j} = 0$. Les équations supplémentaires de l'idéal premier compatible sont donc des équations que l'on peut supposer, quitte à effectuer les substitutions nécessaires, uniquement en les dérivés des H_i par rapport aux t_k . Cet idéal ne peut être invariant par n'importe quelle transformation en t : le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie construit est donc différent de celui de tous les automorphismes du feuilletage. $\square$

Lemme 4.4.7 *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage de codimension un dont le groupeïde de Galois est propre. Il existe une intégrale première de $\mathcal{F}$ dans une extension fortement normale de $\mathcal{M}_\Delta$.*

Preuve. – En codimension un le rang transverse d'un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible propre est fini. La preuve de ce lemme se fait au cas par cas en discutant suivant le rang transverse du groupeïde de Galois du feuilletage. On sait d'après le théorème 4.2.2 qu'il existe dans ces cas des intégrales premières particulières. Ces intégrales premières vont nous donner des idéaux différentiels premiers particuliers de $\mathcal{O}_\mathcal{F}$. Les corps des fractions des quotients de $\mathcal{O}_\mathcal{F}$ par ces idéaux nous donneront dans chaque cas une extension fortement normale contenant une intégrale première.

Les feuilletages méromorphiquement intégrables.

Lorsque le rang transverse est nul, le groupeïde de Galois est non transitif et il existe une intégrale première méromorphe. L'extension est $\mathcal{M}_\Delta$ et le morphisme est celui qui à H associe une intégrale première méromorphe.

Les feuilletages Darboux-intégrables.

Lorsque le rang transverse est égal à un, rappelons comment on a construit une intégrale première de type Darboux. Pour $\Gamma \in \text{Aut}(\mathcal{F}_\omega)$, on note f_Γ la fonction définie par $\Gamma^*\omega = f_\Gamma\omega$. On notera aussi $\omega = \sum w_i dx_i$ dans des coordonnées fixées. Le groupeïde de Galois d'un feuilletage Darboux-intégrable est de la forme :

$$\Gamma^*\omega \wedge \omega = 0 \text{ et } m \circ \Gamma f_\Gamma^k = m$$

pour une fonction méromorphe m et un entier k . Le système défini par les équations :

$$(dH)^{\otimes k} - m(x)\omega^{\otimes k} = 0$$

fournit un idéal différentiel premier $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_\mathcal{F}$. Le corps des fractions $\mathcal{K}$ du quotient $\mathcal{O}_\mathcal{F}/\mathcal{J}$ est de degré de transcendance un. Pour prouver qu'il s'agit d'une extension fortement normale, prenons $\mathcal{E}$ une extension différentielle de $\mathcal{M}_\Delta$ et σ_1 et σ_2 deux plongements de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{E}$. Ces plongements sont complètement déterminés par $H_1 = \sigma_1 H$ et $H_2 = \sigma_2 H$, où par abus de notation H désigne aussi son image dans $\mathcal{K}$. Les éléments H_1 et H_2 de $\mathcal{E}$ vérifient tous les deux l'équation engendrant $\mathcal{J}$. Il existe

donc une racine k -ième de l'unité θ et une constante b de $\mathcal{E}$ telles que $H_1 = \theta H_2 + b$. Ayant obtenu une expression rationnelle de H_1 en fonction de H_2 à coefficients dans les constantes de $\mathcal{E}$, on a $\sigma_1 \cdot \mathcal{E}^c = \sigma_2 \cdot \mathcal{E}^c$. Le corps $\mathcal{K}$ est donc une extension fortement normale de $\mathcal{M}_\Delta$ de groupe de Galois les transformations $x \rightarrow \theta x + b$ de la droite affine.

Les feuilletages Liouville-intégrables.

Lorsque le rang transverse de $\mathcal{F}_\omega$ est deux, il existe une forme fermée α vérifiant $d\omega = \omega \wedge \alpha$. Le groupoïde de Galois d'un tel feuilletage a pour équations :

$$\Gamma^* \omega \wedge \omega = 0 \text{ et } \Gamma^* \alpha + \frac{df_\Gamma}{f_\Gamma} = \alpha.$$

On construit des intégrales premières particulières de ce feuilletage en résolvant successivement

$$\frac{dF}{F} = \alpha \text{ puis } dH = F\omega.$$

Dans des coordonnées on écrit $\omega = \sum w_i dx_i$ et $\alpha = \sum a_i dx_i$. Le système d'équations correspondant est :

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{w_i} = \frac{\frac{\partial H}{\partial x_j}}{w_j}, \quad \frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}}{\frac{\partial H}{\partial x_i}} = a_i + \frac{\frac{\partial w_i}{\partial x_i}}{w_i} \text{ pour } 0 \leq i, j \leq n.$$

Ce système donne un idéal différentiel $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Le corps des fractions du quotient $\mathcal{K}$ est de degré de transcendance deux. Étant données deux solutions H_1 et H_2 des équations ci-dessus dans une extension de $\mathcal{M}_\Delta$, on a $H_1 = aH_2 + b$ avec a et b deux constantes de l'extension. Le corps $\mathcal{K}$ est donc une extension fortement normale de $\mathcal{M}_\Delta$ de groupe de Galois les transformations $x \rightarrow ax + b$ de la droite affine.

Les feuilletages Riccati-intégrables.

Lorsque le rang transverse de $\mathcal{F}_\omega$ est trois, ce feuilletage admet une suite de Godbillon-Vey de longueur trois : (ω, α, β) . On construit des intégrales premières particulières en résolvant la suite d'équations :

$$\begin{aligned} dG &= \frac{G^2}{2}\omega + G\alpha + \beta \\ \frac{dF}{F} &= G\omega + \alpha \\ dH &= F\omega. \end{aligned}$$

Dans des coordonnées on écrit $\omega = \sum w_i dx_i$, $\alpha = \sum a_i dx_i$, $\beta = \sum b_i dx_i$. Le système d'équations aux dérivées partielles correspondant est :

$$\frac{\frac{\partial H}{\partial x_i}}{w_i} = \frac{\frac{\partial H}{\partial x_j}}{w_j} \\ \frac{1}{w_i} \left(\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}}{\frac{\partial H}{\partial x_i}} - \frac{\frac{\partial w_i}{\partial x_i}}{w_i} - a_i \right) = \frac{1}{w_j} \left(\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x_j^2}}{\frac{\partial H}{\partial x_j}} - \frac{\frac{\partial w_j}{\partial x_j}}{w_j} - a_j \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}}{\frac{\partial H}{\partial x_i}} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}}{\frac{\partial H}{\partial x_i}} \right)^2 &= w_i \left(\left(\frac{\frac{\partial w_i}{\partial x_i}}{w_i} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{\partial w_i}{\partial x_i}}{w_i} \right)^2 \right) \\ &\quad + \frac{\partial a_i}{\partial x_i} - \frac{1}{2} a_i^2 + b_i - a_i \frac{\frac{\partial w_i}{\partial x_i}}{w_i}. \end{aligned}$$

Ces équations donnent un idéal différentiel $\mathcal{J}$ de $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$. Le corps des fractions du quotient $\mathcal{K}$ est de degré de transcendance trois. Étant données deux solutions H_1 et H_2 des équations ci-dessus dans une extension de $\mathcal{M}_{\Delta}$ on a $H_1 = \frac{aH_2+b}{cH_2+d}$ avec a, b, c, d quatre constantes de l'extension. Le corps $\mathcal{K}$ est donc une extension fortement normale de $\mathcal{M}_{\Delta}$ de groupe de Galois les transformations homographiques de la droite projective. $\square$

Chapitre 5

Groupoïdes de Galois de feuilletages classiques

5.1 Le grupoïde de Galois d'un germe de feuilletage de $(\mathbb{C}^2, 0)$ à singularité réduite

Nous allons maintenant déterminer les feuilletages sur un bidisque à singularité réduite dont le grupoïde de Galois est de rang transverse fini en fonction des invariants de leurs classes analytiques.

Définition 5.1.1 *Un feuilletage $\mathcal{F}$ de $(\mathbb{C}^2, 0)$ sera dit à singularité réduite si il existe une forme ω définissant $\mathcal{F}$ dont la partie linéaire s'écrit dans de bonnes coordonnées :*

1. $\lambda_1 x dy + \lambda_2 y dx, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}_{<0},$
2. $y dx.$

La terminologie employée renvoie au théorème de réduction de Seidenberg [Se] : ces singularités sont les plus simples que l'on obtient après éclatements.

Les feuilletages de type (1) sont appelés des selles. Ils admettent deux courbes analytiques invariantes lisses et transverses dont les holonomies ont pour parties linéaires $e^{-2i\pi\lambda_1/\lambda_2}$ et $e^{-2i\pi\lambda_2/\lambda_1}$. Ces feuilletages ont des comportements différents suivant les valeurs de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Lorsque $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ n'est pas réel ou réel négatif non rationnel, on sait, d'après Poincaré, que le feuilletage est analytiquement linéarisable. Lorsque $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est réel irrationnel, le feuilletage est formellement linéarisable [II]. Lorsque $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est rationnel ces feuilletages s'appellent selles résonnantes. Ils ne sont plus linéarisables, mais admettent les formes normales formelles suivantes :

$$p(1 + (\lambda - 1)(x^p y^q)^k) y dx + q(1 + \lambda(x^p y^q)^k) x dy.$$

Les axes de coordonnées sont des courbes invariantes pour ces feuilletages. L'holonomie de la feuille $x = 0$ calculée sur la transversale $(y = 1, x = t)$ est le difféomor-

phisme

$$f = e^{-2i\pi p/q} \exp \left(\frac{t^{qk+1}}{1 - \lambda \frac{t^{qk}}{p} \frac{d}{dt}} \right).$$

La classe de conjugaison analytique de cette holonomie est un invariant complet de la classe analytique du feuilletage. D'après les résultats de [M-R2], après préparation du feuilletage, il existe des normalisations analytiques h_i sur des secteurs U_i de la forme $-\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg((x^p y^q)^k) < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ qui sont asymptotes à la normalisante formelle tangente à l'identité. Le cocycle $(U_i \cap U_{i+1}, h_{i+1} \circ h_i^{-1})_i$ induit un invariant complet de la classe analytique du feuilletage.

Les feuilletages de type (2) sont appelés des nœud-cols. Ils ont pour formes normales formelles

$$x^{k+1} dy - y(1 - \lambda x^k) dx$$

d'holonomie $f = \exp(\frac{t^{k+1}}{1 - \lambda t^k} \frac{d}{dt})$ calculée sur la transversale $(y = 1, x = t)$ à la séparatrice forte $x = 0$. D'après les résultats de [M-R1], après préparation du feuilletage, il existe des normalisations analytiques h_i sur des secteurs U_i de la forme $-\frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg(x^k) < \frac{\pi}{2} + \varepsilon$ qui sont asymptotes à la normalisante formelle tangente à l'identité. Elles définissent un cocycle qui est un invariant complet de la classe analytique du feuilletage.

Dans le cas des selles résonnantes et des nœud-cols, les invariants de la classe de conjugaison analytique de l'holonomie de la séparatrice forte sont donnés par les composantes transverses des invariants analytiques du feuilletage.

Proposition 5.1.2 *Soit f l'holonomie d'un feuilletage à singularité réduite $\mathcal{F}$. Si f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}$ sur un disque transverse T alors il existe un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ dont l'équation transverse au voisinage de T coïncide avec celle de $\mathcal{G}$.*

Preuve. – Nous commençons par déterminer la liste des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de rang transverse supérieur ou égal à un admissible pour le nœud-col modèle $\omega = x^2 dy - y dx$. Le facteur intégrant $F = \frac{1}{x^2 y}$ détermine un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang transverse un obtenu en écrivant l'invariance de la forme fermée $F\omega$:

$$\frac{dY}{Y} - \frac{dX}{X^2} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x^2}.$$

Considérons les cartes $y \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ et $y \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$. En choisissant deux déterminations de $\log y$, on les munit des coordonnées redressantes $t = \frac{x}{x \log y + 1}$ et $z = y$. Dans ces coordonnées, on vérifie que les équations de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie s'écrivent :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ et } \frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{t^2}.$$

On retrouve la formule (1) de la remarque 4.1.6 qui donne sur la partie transverse le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}_1(-\frac{2}{t})$.

Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de rang transverse deux admissibles pour ω sont obtenus d'après le théorème 4.1.2 à partir de toutes les formes fermées α vérifiant $d\omega = \omega \wedge \alpha$. Dans le cas du nœud-col, ces formes s'écrivent

$$\alpha = \frac{dF}{F} + cF\omega$$

où c est un nombre complexe quelconque. Considérons les cartes $y \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ et $y \notin \mathbb{R}_{\geq 0}$. Dans les coordonnées précédentes, $\omega = w(z, t)dt$. D'après la formule (2) de la remarque 4.1.6, l'équation transverse du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie associé à la suite de Godbillon-Vey (ω, α) est $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec $\mu(t)dt = \alpha + \frac{dw}{w}$. On vérifie que les équations de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie s'écrivent :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ et } \mathcal{G}_2\left(-\frac{c}{t^2} - \frac{2}{t}\right).$$

Les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie de rang transverse trois sont obtenus en prenant toutes les formes α vérifiant la première équation de Godbillon-Vey et en complétant la suite par l'unique forme β satisfaisant les deux dernières équations de Godbillon-Vey. On obtient les suites $(\omega = x^2dy - ydx, \alpha = \frac{dF}{F} + cF\omega, \beta = F^2\omega)$. Dans les cartes de coordonnées (t, z) précédentes, d'après la formule (3) de la remarque 4.1.6, l'équation transverse du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie définie par la suite (ω, α, β) est $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec

$$\nu(t)dt = w\beta + d\left(\frac{\partial_t w}{w} + a_t\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial_t w}{w} + a_t\right)^2 dt$$

où $\omega = w(z, t)dt$ et $\alpha = a_t dt + a_z dz$. On en déduit que les équations de ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie s'écrivent :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ et } \mathcal{G}_3\left(-\frac{c^2}{t^4}\right).$$

D'autre part, d'après le début de la section 4.4, les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie sur le disque transverse contenant l'holonomie $\exp(t^2 \frac{d}{dt})$ du nœud-col sont $\mathcal{G}_1(-\frac{2}{t})$, $\mathcal{G}_2(-\frac{c}{t^2} - \frac{2}{t})$ et $\mathcal{G}_3(-\frac{c^2}{t^4})$ et seulement ceux-ci. Ces deux listes étant identiques, nous avons montré la proposition pour le nœud-col $x^2dy - ydx$. Les autres formes normales de nœud-cols, $x^{k+1}dy - y(1 - \lambda x^k)dx$, se ramènent au cas précédent par $(x, y) \mapsto (\frac{x}{1 - \lambda x \log x}, y)$ et la ramification $(x, y) \mapsto (x^k, y)$. Les formes normales de selles résonnantes se ramènent aux nœud-cols par l'éclatement $(x, y) \mapsto (xy, y)$ et la ramification $(x, y) \mapsto (x^p, y^q)$. Tous ces feuilletages admettant des facteurs intégrants, on peut aussi dériver directement les équations des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie admissibles pour un de ces feuilletages en considérant toutes les suites de Godbillon-Vey que l'on peut associer à ce feuilletage, à équivalence près.

Considérons un nœud-col dans la classe formelle de $x^{k+1}dy - y(1 - \lambda x^k)dx$ dont l'holonomie n'est plus analytiquement normalisable, et supposons que celle-ci soit

solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang trois $\mathcal{G}_3(\nu)$. Nous allons construire un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage de rang transverse trois. On sait d'après le théorème 2.2.3, que f est solution d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang trois si et seulement si sa forme normale formelle et ses invariants analytiques sont eux-mêmes solutions d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang trois $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$. Soit $\hat{h}$ la conjuguante formelle entre f et sa forme normale. On a

$$\nu = \bar{\nu} \circ \hat{h}(\hat{h}')^2 + S\hat{h}.$$

Nous avons prouvé ci-dessus que ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie se prolonge en un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie $\mathcal{G}$ admissible pour le feuilletage modèle de rang transverse trois.

Maintenant nous allons construire un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage initial à partir de $\mathcal{G}$. Quitte à faire une conjugaison analytique, on peut supposer que la séparatrice forte du feuilletage a pour équation $x = 0$. Le nœud-col est alors conjugué au-dessus des secteurs $(-\frac{\pi}{2} - \epsilon \leq \arg(x^{2k}) \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon)$ à sa forme normale formelle par des normalisantes sectorielles h_i , avec i variant dans $\mathbb{Z}/2k\mathbb{Z}$, asymptotes à la normalisante formelle. On considère alors les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie $h_i^*\mathcal{G}$ au-dessus de chaque secteur. Une fois que l'on s'est fixé les deux premières formes (ω, α) d'une suite de Godbillon-Vey de logueur trois pour le nœud-col, ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est la donnée d'une troisième forme β_i satisfaisant les équations de Godbillon-Vey. Montrons que sur les intersections de deux de ces secteurs les deux formes β_i et β_{i+1} coïncident. Puisque, d'après [M-R1], les composantes transverses de $h_i \circ h_{i+1}^{-1}$ sont les composantes du cocycle des invariants de l'holonomie f , celui-ci étant solution de $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$, l'automorphisme du feuilletage modèle $h_i \circ h_{i+1}^{-1}$ est solution de $\mathcal{G}$. Soit (t, z) des coordonnées redressantes au voisinage d'un disque ($z = 0$) transverse à la séparatrice forte ($t = 0$). En écrivant les équations des $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie correspondants aux triplets $(\omega, \alpha, \beta_i)$ et $(\omega, \alpha, \beta_{i+1})$ (formules 4.1.6) on obtient pour chacune des équations sur les secteurs transverses correspondant, $\mathcal{G}_3(\nu_i)$ et $\mathcal{G}_3(\nu_{i+1})$ avec

$$\nu_i = \bar{\nu} \circ h_i(h_i')^2 + Sh_i$$

où on désigne par h_i la composante transverse de la normalisante sectorielle h_i . Comme la composante transverse de $h_i \circ h_{i+1}^{-1}$ est solution de $\mathcal{G}_3(\bar{\nu})$ $\nu_i = \nu_{i+1}$, les fonctions ν_i et ν_{i+1} étant asymptotes à ν , elles sont égales à cette dernière. La forme β est ainsi bien définie et méromorphe.

Les selles résonnantes se traitent exactement de la même manière : seuls les secteurs changent de formes et sont donnés par $(-\frac{\pi}{2} - \epsilon \leq \arg((x^p y^q)^k) \leq \frac{\pi}{2} + \epsilon)$.

La preuve dans le cas d'une holonomie unitaire est analogue. $\square$

Proposition 5.1.3 *Soit $\mathcal{F}$ un germe de feuilletage à singularité réduite.*

1. $\mathcal{F}$ admet un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse un si et seulement si son holonomie est analytiquement normalisable.
2. $\mathcal{F}$ admet un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse deux si et seulement si son holonomie est unitaire.

3. $\mathcal{F}$ admet un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse trois si et seulement si son holonomie est binaire.

Preuve. – Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage réduit admettant un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de rang transverse fini. Celui-ci définit un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de même rang contenant l'holonomie par le lemme 1.4.4. Lorsque l'holonomie est un difféomorphisme résonnant, le théorème 2.2.4 nous assure qu'elle est normalisable, unitaire ou binaire suivant la valeur du rang. Dans le cas des holonomies formellement linéarisables, le théorème 2.2.1 nous assure qu'elle est analytiquement linéarisable. Pour la réciproque, considérons d'abord les feuilletages analytiquement linéarisables ou normalisables. Ils admettent toujours un facteur intégrant et donc un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible de rang transverse un.

Considérons ensuite les selles résonnantes et les nœud-cols d'holonomie unitaire ou binaire. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie donné par le théorème 2.2.4 s'étend grâce à la proposition 5.1.2 précédente en un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage de rang transverse deux ou trois. $\square$

Nous obtenons ainsi une nouvelle preuve de la caractérisation sur les invariants analytiques des feuilletages à singularité réduite admettant une structure transverse affine méromorphe ou une structure transverse projective méromorphe.

Ces résultats ont déjà été obtenus en utilisant d'autres techniques dans [B-T] pour le cas transversalement affine et [Tou2] dans le cas transversalement projectif.

5.2 Le groupoïde de Galois d'équations du premier ordre

Dans ce paragraphe, nous allons étudier le groupoïde de Galois des feuilletages donnés par les équations de Weierstrass : $y'^2 = 4y^3 + g_2y + g_3$ et de Riccati : $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$.

5.2.1 L'équation de Weierstrass

L'équation de Weierstrass donne un feuilletage de $\mathbb{T} \times \mathbb{P}^1$ où $\mathbb{T}$ est le tore de $\mathbb{P}^2$ d'équation $y_1^2 - 4y^3 - g_2y - g_3 = 0$. Ce feuilletage est donné par la forme $\omega = dy - y_1 dx$.

Cette forme admet un facteur intégrant. En effet la forme $\frac{\omega}{y_1}$ est fermé sur le tore. D'après le théorème 4.1.2 le groupoïde de Galois de ce feuilletage est de rang transverse inférieur à un. Pour montrer que le groupoïde de Galois est de rang transverse égal à un, il suffit de montrer que ce feuilletage n'a pas d'intégrale première méromorphe sur $\mathbb{T} \times \mathbb{P}^1$. Ceci découle de la transcendance de la fonction de Weierstrass $\wp$ sur le corps des fractions rationnelles. Sinon on peut directement voir ce résultat de la manière suivante.

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{P}^1 \\ (z, x) &\mapsto (\wp(z), \wp'(z), x) \end{aligned}$$

où $\wp$ est fonction de Weierstrass, solution de l'équation ci-dessus. Le pull-back de ω est $\wp'(z)(dz - dx)$. Le pull-back du feuilletage est donc le feuilletage par les droites $z = x + c$ et par la droite $x = \infty$ et le pull-back d'un groupoïde admissible donne un groupoïde admissible pour le feuilletage en droites. Soit Λ le réseau de $\wp(z)$ correspondant aux constantes g_2 et g_3 . L'action d'un élément de Λ sur $\mathbb{C}$ se projette sur l'identité sur $\mathbb{T}$. Les translations du réseau sont donc toutes solutions du pull-back du groupoïde de Galois du feuilletage de Weierstrass. Ces translations agissent en effet comme translations de la fibre en $0 : \mathbb{C}$ mais ces fibres ne sont pas transverses à toutes les feuilles du feuilletage.

Regardons la transversale $z = 0 : \mathbb{P}^1$. Le feuilletage établit une bijection entre la fibre $\mathbb{C}$ et le complémentaire de l'infini dans la transversale $\mathbb{P}^1$. L'action des translations par τ donne sur la transversale une translation par $-\tau$. Lorsque l'on calcule le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse d'un groupoïde admissible pour le feuilletage en droite sur cette transversale, on doit donc obtenir un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sur $\mathbb{P}^1$ dont les translations par les éléments de $-\Lambda$ sont solutions. Il n'existe pas de tels $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie d'ordre zéro.

Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible obtenu en considérant les transformations laissant invariant le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial z}$ se projette sur le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie sur $\mathbb{T} \times \mathbb{P}^1$ laissant invariant le champ $y_1 \frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + \frac{g_2}{2}) \frac{\partial}{\partial y_1}$. C'est le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie agissant transversalement comme le tore sur lui-même.

5.2.2 L'équation de Riccati

Soit Δ un disque de $\mathbb{C}$. Une équation de Riccati est un feuilletage de $\Delta \times \mathbb{P}^1$ donné par la forme

$$\omega = dy - (a(x) + b(x)y + c(x)y^2)dx,$$

où a , b et c sont méromorphe sur Δ . On obtient facilement une suite de Godbillon-Vey de longueur trois. On prend le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial y}$, la forme $\alpha = L_{\frac{\partial}{\partial y}} \omega$ et $\beta = L_{\frac{\partial}{\partial y}} \alpha$. D'après le théorème 4.1.2 le groupoïde de Galois de ce feuilletage est de rang transverse inférieur à trois. Calculons le groupoïde transverse sur la fibre $\{x = p\}$ en un point p qui ne soit un pôle ni de a , ni de b , ni de c . Les lieux des pôles des formes ω , α et β se trouvent sur les fibres singulières (celles correspondantes aux pôles de a , b et c). D'après les formules de la remarque 4.1.6, le groupoïde transverse calculé sur une transversale $p \times \mathbb{P}^1$ est $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec ν rationnel n'ayant ni pôles ni zéros sur $\mathbb{P}^1$. D'après la formule de changement de carte pour ν , celui-ci peut être considéré comme le coefficient d'une différentiel quadratique. Il doit donc être nul. Le groupoïde transverse calculé sur cette transversale est donc le groupoïde des

transformations projectives. Ce groupoïde de Lie est un groupoïde admissible. Il nous faut discuter les cas où le groupoïde de Galois est plus petit. Les différents cas qui apparaissent se traitent sur l'équation différentiel linéaire du second ordre associée à la Riccati. Dans le paragraphe suivant nous montrons que le groupoïde de Galois et le groupe de Galois différentiel coïncident pour des équations différentielles linéaires. Ceci implique la même coïncidence pour les équations de Riccati.

5.3 Le groupoïde de Galois d'une équation différentielle linéaire

Nous allons étudier le groupoïde de Galois d'un feuilletage linéaire et préciser les liens de cet objet avec l'extension de Picard-Vessiot associée à l'équation différentielle linéaire décrivant le feuilletage.

Dans [Ma5], B.Malgrange montre :

Théorème 5.3.1 *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage donné par un système d'équations différentielles linéaires redonne sur une transversale le groupe de Galois différentiel du système d'équations.*

Sa preuve passe par la description “Tannakienne” du groupe de Galois différentiel. Nous nous proposons ici de prouver ce théorème par la théorie de Picard-Vessiot. La preuve se fera en deux étapes. Dans la première nous prouverons qu'il existe un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible redonnant le groupe de Galois sur une transversale. Ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie des symétries d'un système différentiel décrivant certaines intégrales premières du feuilletage données par la construction classique de l'extension de Picard-Vessiot. Dans la deuxième, nous prouverons que ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est minimal.

5.3.1 Rappels sur la théorie de Picard-Vessiot

Soient D un disque de $\mathbb{C}$ et E un fibré vectoriel au-dessus d'un disque sur lequel on met l'équation linéaire $\dot{y} = A(x)y$ avec A méromorphe.

On construit une extension de Picard-Vessiot en construisant la connexion associée sur le fibré en GL_n associé et en prenant le corps des fonctions sur la clôture de Zariski d'une feuille (quelconque) de ce nouveau feuilletage.

Classiquement, on fait comme ceci : on considère $GL_n E$ muni des coordonnées Y_i^j et l'anneau

$$\mathcal{M}_D[\dots, Y_i^j, \dots, Y_i^n, \dots, (\det(Y_i^j))^{-1}]$$

avec la dérivation $\dot{Y}_i^n = Y_i^{n+1}$. On considère l'idéal différentiel engendré par les équations $\dot{Y} - A(x)Y$, puis un idéal différentiel maximal le contenant : Max . C'est

l'idéal qui donne la clôture d'une feuille dans le fibré en GL_n . L'extension de Picard-Vessiot est alors donnée par le corps des fractions de

$$\mathcal{M}_D[\dots, Y_i^j, \dots, Y_i^n, \dots, (\det(Y_i^j))^{-1}]/Max.$$

5.3.2 La $\mathcal{D}$ -variété des intégrales premières

Le feuilletage associé à l'équation sur E est donné par les formes $dy - A(x)ydx$. Les intégrales premières de ce feuilletage satisfont

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A(x)y = 0$$

où $\frac{\partial}{\partial y} = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n})$.

La $\mathcal{D}$ -variété (ou système différentiel) des intégrales premières est décrite par un idéal différentiel $\mathcal{I}$ de l'anneau

$$\mathcal{M}_D[\phi_1, \dots, \phi_n, \dots, \phi_i^\alpha, \dots] |_{(\text{localisé en } d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n \neq 0)}$$

différentiablement engendré par les composantes de :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} A(x)y, \quad (\underline{Int Prem})$$

avec $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T$. Le groupoïde de Galois du feuilletage est majoré par les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie des symétries des idéaux différentiels premiers de

$$\mathcal{O}_{IP} = \mathcal{M}_D[\phi_1, \dots, \phi_n, \dots, \phi_i^\alpha, \dots] / \mathcal{I} |_{(\text{localisé en } d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n \neq 0)}.$$

Nous allons construire des idéaux premiers dont le $\mathcal{D}$ -groupoïde des symétries agit transversalement comme le groupoïde de Galois.

5.3.3 Les intégrales premières linéaires et leurs symétries

Le système différentiel des intégrales premières linéaires est décrit par l'idéal Int Prem auquel on ajoute les équations

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_\ell \partial y_k} \quad (\underline{Affine})$$

et

$$\Phi - \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} y_k \quad (\underline{Linéaire})$$

Remarque 5.3.2 Sous les conditions Affine + Linéaire, Int Prem se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial y} A(x) \quad (\underline{Adjointe})$$

Le théorème de Cauchy assure que le système Affine + Linéaire + Int Prem est intégrable en dehors des pôles de A .

Les symétries de ces différents idéaux sont données par le lemme 4.4.6 et donnent un majorant du groupoïde de Galois. Elles se calculent de la manière suivante (c'est exactement celle de Malgrange).

On note $(x, y, \Phi \dots)$ des coordonnées locales et $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\Phi} \dots)$ les coordonnées images par un jets $(x, y, \bar{x}, \bar{y}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \dots)$.

- (1) Le difféomorphisme doit fixer l'idéal Int Prem :
on écrit $d\bar{y} - A(\bar{x})\bar{y}d\bar{x}$ est colinéaire à $dy - A(x)ydx$. La forme

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial y} - A(\bar{x})\bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} \right)}_{S_y} dy + \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial x} - A(\bar{x})\bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right)}_{S_x} dx$$

doit être un multiple de $dy - A(x)ydx$ donc

$$S_x + S_y A(x)y = 0 \quad (\underline{Aut})$$

- (2) Le difféomorphisme doit fixer l'idéal Int Prem + Affine :
On écrit $d\bar{\Phi} = \zeta \Phi$ et $d\zeta = 0$:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(dy - A(x)ydx)$$

$$d\bar{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} (S_y dy + S_x dx)$$

d'où

$$d\left(\frac{\partial y}{\partial \bar{y}} S_y\right) = 0 \quad (\underline{Aut Aff})$$

- (3) Le difféomorphisme doit fixer l'idéal Int Prem + Affine + Linéaire :

On écrit $\bar{\Phi} = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}_k} \bar{y}_k = \sum_k \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} y_k$ ce qui se réécrit en tenant compte de Adjointe :

$$\bar{y} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} y - A(x)\bar{y} \frac{\partial \bar{x}}{\partial y} y \quad (\underline{Aut Lin})$$

Lorsque l'on considère un difféomorphisme de la forme $(x, y, x, \bar{y}, 1, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x}, 0, \frac{\partial \bar{y}}{\partial y}, \dots)$, ceci nous donne la linéarité de $\bar{y}$ par rapport à y .

5.3.4 Les intégrales premières de Picard-Vessiot et leurs symétries

L'idéal maximal intervenant dans la construction d'une extension de Picard-Vessiot, nous fournit un autre idéal différentiel premier (et même maximal) contenant $\underline{Affine} + \underline{Linéaire} + \underline{Int Prem}$. Pour être plus précis, c'est l'idéal maximal intervenant dans la construction d'une extension pour les équations adjointes.

Nous reprenons les notations de la section 5.3.1. Soit Max un idéal différentiel maximal de $\mathcal{M}_D[\dots, Y_i^j, \dots, Y_i^n, \dots, (det(Y_i^j))^{-1}]$ contenant les composantes de $\dot{Y} + YA(x)$. Les équations de Max fournissent des équations de

$$\mathcal{M}_D[\phi_1, \dots, \phi_n, \dots, \phi_i^\alpha, \dots] |_{(\text{localisé en } d\phi_1 \wedge \dots \wedge d\phi_n \neq 0)}$$

en remplaçant Y par $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$. Nous noterons Max' l'idéal différentiel engendré par $\underline{Affine} + \underline{Linéaire} + \underline{Int Prem} +$ (toutes ces nouvelles équations). C'est un idéal différentiel maximal. Les équations que nous rajoutons ne sont pas explicites et il n'est pas facile de déterminer les équations du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie de ses symétries données par le lemme 4.4.6. Néanmoins si on s'intéresse aux solutions fibrées c'est-à-dire vérifiant les conditions supplémentaires engendrées par $\bar{x} = x$ les calculs se ramènent au cas classique (voir [Mag]). Les équations que satisfont ces difféomorphismes sont celles qui disent que les idéaux : $\{E(\frac{\partial \Phi}{\partial y}) \text{ pour } E \in Max\}$ et $\{E(\frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}) \text{ pour } E \in Max\}$ sont identiques. Ce sont exactement les équations du groupe de Galois différentiel du système d'équations adjoint.

Nous avons donc prouvé :

Proposition 5.3.3 *Il existe un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie défini sur E admissible pour le feuilletage donné par les équations différentielles linéaires et qui sur une fibre régulière redonne la représentation canonique du groupe de Galois.*

5.3.5 Réciproque

D'après la proposition ci-dessus, si les équations du groupoïde de Galois diffèrent de celles que nous venons de construire, c'est par de nouvelles équations d'ordre inférieur ou égal à un.

Considérons $\bar{x}$ un point régulier pour les équations et Φ un jet d'intégrale première linéaire sur les fibres $(\bar{x}, \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \dots)$. Nous allons regarder les équations que vérifie l'orbite de ce jet sous l'action du groupoïde de Galois. Les glissements locaux le long des feuilles laissant invariant chaque système d'intégrale première, nous nous intéresserons dans un premier temps à l'orbite de Φ sous l'action des éléments fibrés du groupoïde de Galois : φ vérifiant $\bar{x} = \bar{x}(x)$. Les équations aux dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à un que vérifie φ donnent des équations aux

dérivées partielles pour $\Phi \circ \varphi$ grâce à :

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} (\Phi \circ \varphi) \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial y} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \frac{\partial (\Phi \circ \varphi)}{\partial y} \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial x} &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \bar{y}} \right)^{-1} \frac{\partial (\Phi \circ \varphi)}{\partial x} + A(\bar{x})\bar{y}\end{aligned}$$

Nous construisons ainsi un système d'équations aux dérivées partielles compatible avec l'idéal Affine + Linéaire + Int Prem. L'intégrale première Φ est entièrement déterminée par un système complet de solutions d'une équation différentielle linéaire. Si une intégrale première en $\bar{x}$ est solution d'un idéal différentiel maximal alors en composant cette intégrale première par une application linéaire, on obtient que toutes les intégrales premières linéaires sont solutions d'un idéal différentiel maximal. Soit Max l'idéal différentiel maximal s'annulant en Φ . Le groupoïde de Galois fixe Max . Il échange donc les solutions de Max . D'un autre côté le groupe de Galois agit transitivement sur les zéros de Max donc l'orbite de Φ est incluse dans les zéros de Max . Ceux-ci ne peuvent donc qu'être égaux aux zéros de Max . Ceci implique par construction que le groupoïde de Galois agit transversalement comme la représentation canonique du groupe de Galois.

5.4 Le groupoïde de Galois d'un feuilletage Hamiltonien complètement intégrable

Nous allons regarder le comportement du groupoïde de Galois d'un système Hamiltonien complètement intégrable. Rappelons les définitions suivantes.

Définition 5.4.1 Soit M^{2n}, ω une variété symplectique,

- X est un champ symplectique sur M si $L_X \omega = 0$.
- X est un champ Hamiltonien si il existe une fonction H telle que $dH = \omega(X, \cdot)$. Dans ce cas le champ sera appelé le gradient symplectique de H et noté X_H .
- X est complètement intégrable si il existe des intégrales premières $H_1, \dots, H_n$ du champ fonctionnellement indépendantes et en involution (c'est-à-dire $X_{H_i} H_j = 0$).

Dans [Ma6] on trouve la première partie du théorème suivant (dû à J.P.Ramis) que nous adaptons ensuite dans le cas des feuilletages. La preuve est essentiellement contenue dans les références sur l'intégrabilité des systèmes Hamiltoniens. Elle est a rapprochée du théorème de Morales-Ramis (voir [Mo] et [Au]).

Théorème 5.4.2

1. Soit X un champ symplectique complètement intégrable. La $\mathcal{D}$ -enveloppe de X a une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie abélienne.

2. Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage donné par un champ de vecteurs hamiltonien complètement intégrable. Le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse associé au groupoïde de Galois a une $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie abélienne.

La preuve de la première partie de ce théorème peut se faire en utilisant le lemme suivant, conséquence du lemme de Cartan ([St]).

Lemme 5.4.3 Soit $H_1, \dots, H_n$ des fonctions fonctionnellement indépendantes, en involution, de gradients symplectiques $X_1, \dots, X_n$. Le champ $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ est symplectique si et seulement si le vecteur $(d\lambda_1, \dots, d\lambda_n)$ est l'image du vecteur $(dH_1, \dots, dH_n)$ par une matrice symétrique.

$$\begin{aligned} \text{Preuve.} \quad - \quad L_{\lambda_i X_i} \omega &= d(\omega(\lambda_i X_i, \cdot)) \quad \text{car } d\omega = 0 \\ &= d\lambda_i \wedge \omega(X_i, \cdot) \\ &= d\lambda_i \wedge dH_i \quad \text{car } \omega(X_i, \cdot) = dH_i \end{aligned}$$

Le champ $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ est symplectique si $\sum_{i=1}^n d\lambda_i \wedge dH_i = 0$ ce qui signifie d'après le lemme de Cartan que $d\lambda_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^j dH_j$. En particulier les λ_i sont constants sur une fibre de l'intégrale première. $\square$

Preuve théorème 5.4.2 - 1. - La $\mathcal{D}$ -enveloppe du champ est contenue dans le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie défini par les équations :

$$\begin{aligned} \Gamma^* H_i &= H_i \quad \text{de linéarisé} \quad L_X H_i = 0 \\ \Gamma^* \omega &= \omega \quad \text{de linéarisé} \quad L_X \omega = 0 \end{aligned}$$

Le premier ensemble d'équations signifie que les solutions de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie sont des champs qui sont combinaisons linéaires des gradients symplectiques des H_i et la dernière, qu'ils sont en plus symplectiques. Le lemme 5.4.3 nous donne leurs formes. Calculons le crochet de deux champs solution de cette $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie : $[\sum \lambda_i(H_1, \dots, H_n) X_i, \sum \lambda_j(H_1, \dots, H_n) X_j]$. Les H_i sont des intégrales premières des X_j et les champs X_i et X_j commutent donc le crochet précédent est nul. $\square$

Le groupoïde de Galois du feuilletage donné par X est la $\mathcal{D}$ -enveloppe de l'ensemble des champs gX avec g une fonction quelconque, il sera donc plus gros que la $\mathcal{D}$ -enveloppe de X et contiendra en particulier des champs non symplectiques.

Preuve théorème 5.4.2 - 2. - Notons H_i les intégrales premières et X_i leurs gradients symplectiques ($X_1 = X$). Les champs gX_1 vérifient $L_{gX_1} \omega = dg \wedge dH_1$. Nous allons considérer les équations d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie :

$$\begin{aligned} \Gamma^* H_i &= H_i \\ \Gamma^*(\omega \wedge dH_1) &= (\omega \wedge dH_1). \end{aligned}$$

Les équations linéarisées sont :

$$\begin{aligned} L_X H_i &= 0 \\ L_X \omega \wedge dH_1 &= 0. \end{aligned}$$

La $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie du groupoïde de Galois est incluse dans celle-ci. Les champs $\sum_{i=2}^n \lambda_i X_i$ sont solutions des équations si et seulement si $\sum_{i=2}^n d\lambda_i \wedge dH_i \wedge dH_1 = 0$. Le lemme de Cartan assure que $d\lambda_i = \sum_{j=1}^n a_i^j dH_j$ donc ne dépend que des H_j . On calcule alors le crochet qui pour les mêmes raisons que précédemment est nul. $\square$

Chapitre 6

Le groupoïde de Galois d'un germe de feuilletage de codimension quelconque

Dans le chapitre précédent, nous avons utilisé abondamment la connaissance des formes locales des équations d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie au-dessus d'un disque pour construire des intégrales premières du feuilletage satisfaisant de "bonnes" équations aux dérivées partielles. Etant donné un feuilletage dont le groupoïde de Galois est de rang transverse fini, nous voulons lui associer un "bon" système d'équations aux dérivées partielles. Si on veut procéder comme au chapitre précédent, il faut commencer par écrire les équations du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse sous leur forme de Lie, c'est-à-dire la forme que l'on obtient lorsqu'on écrit que ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est celui d'invariance d'une structure géométrique. Dans l'état actuel de nos connaissances, ceci n'est possible que lorsque le $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse est transitif.

6.1 Forme locale d'un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif de rang fini

Les modèles pour ces $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie seront les $\mathcal{D}$ -groupoïdes de Lie obtenus de la manière suivante.

Considérons un groupe analytique G et un sous-groupe fermé algébrique affine H . L'espace analytique G/H est muni d'une action transitive de G . Comme dans la section 1.3, on construit un fibré quasi-projectif $\mathcal{V}$ au-dessus de G/H muni d'une action algébrique de $J^*(G/H)$. L'action de G est complètement décrite par une section holomorphe de ce fibré $\underline{s}$. L'action de G laisse invariante la structure géométrique donnée par $\underline{s}$ et toute isométrie de cette structure est la restriction de l'action d'un élément de G .

Soit Δ un polydisque de $\mathbb{C}^n$ et considérons $\mathcal{G}$ un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transitif

de rang fini au-dessus de Δ . On fixe un point x sur Δ régulier pour $\mathcal{G}$ (c'est-à-dire hors des lieux de non involutivité et de non stabilité par composition de $\mathcal{G}$). On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs solutions en x de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de $\mathcal{G}$ et $\mathfrak{h}$ la sous-algèbre de Lie des champs de vecteurs qui s'annulent en x . L'algèbre $\mathfrak{h}$ est intégrée par le groupe algébrique affine d'isotropie de x que l'on notera H .

HYPOTHESE ($\mathcal{H}$)

Il existe un groupe algébrique G ayant pour algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et admettant un sous-groupe fermé isomorphe à H intégrant $\mathfrak{h}$ pour l'inclusion naturelle de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}$.

La construction du fibré donnant la structure géométrique caractérisant un $\mathcal{D}$ -groupeoïde de Lie est complètement décrite par le groupe d'isotropie d'un point. Sous l'hypothèse $\mathcal{H}$, on constate alors que les fibrés construits sur G/H pour G et sur Δ pour $\mathcal{G}$ sont localement les mêmes, ils ont la même fibre, avec la même action du changement de source. On note s la section sur Δ correspondant à $\mathcal{G}$.

Le quotient $(G/H, G)$ sera notre modèle local pour $(\Delta, \mathcal{G})$ au sens de la proposition suivante :

Proposition 6.1.1 *Il existe une section $\underline{s}$ de $\mathcal{V}$ définissant G telle que le système d'équations aux dérivées partielles $F^*\underline{s} = s$ dans $J^*(\Delta \rightarrow G/H)$ soit formellement intégrable en dehors d'un ensemble analytique fermé Z de codimension un.*

Preuve. – Regardons ce qu'il se passe lorsque la source est fixée en p . Soient F_ℓ^1 et F_ℓ^2 deux jets d'ordre ℓ solutions de ces équations. Le jet $F_\ell^1 \circ (F_\ell^2)^{-1}$ laisse la section $\underline{s}$ invariante et est donc le jet d'ordre ℓ de la multiplication à gauche par un élément g de G . Si il existe une solution convergente F du système alors, pour tout entier ℓ , par tout jet d'ordre ℓ solution passe une solution convergente.

Pour trouver la solution convergente, on procède de manière géométrique. Notons $\mathcal{A}$ la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie de $\mathcal{G}$. Soit ℓ en entier et U un polydisque centré en p , on note X^ℓ le prolongement d'ordre ℓ sur $J_\ell(U \rightarrow U)$ d'un champ de vecteurs en p agissant sur l'ouvert but. Lorsque ℓ est assez grand, X^ℓ ne s'annule pas sur l'espace des jets de source p . Comme l'espace des solutions de $\mathcal{A}$ est de dimension finie, on peut supposer ℓ assez grand pour qu'aucun prolongement de solution de $\mathcal{A}$ ne s'annule. Comme ses solutions forment une algèbre de Lie, on peut considérer la variété intégrale M passant par le groupe d'isotropie H de p . C'est une sous-variété de l'espace des jets de source fixé en p et c'est en fait l'ensemble des solutions de $\mathcal{G}$ de source p et de but dans U . La variété intégrale que l'on considère est un fibré au-dessus de U de fibre H . En faisant agir H par composition à la source, on voit que ce groupe agit simplement transitivement sur les fibres de l'application but.

Sur cette variété il existe une algèbre de Lie de champs de vecteurs tangents ne s'annulant pas et isomorphe à $\mathfrak{g}$. Le théorème de Darboux-Cartan donne l'existence

au voisinage de tout point de cette variété d'une application à valeur dans G conjuguant les algèbres et déterminée à l'action à droite d'un élément de G près. En partant d'une application définie au voisinage de l'identité et en la prolongeant le long de H , on obtient une application de M dans G équivariante sous l'action à droite de H . On note F l'application quotient de $U = M/H$ dans G/H . La projection de X^ℓ sur U est X . Cette application conjugue l'algèbre de Lie des champs solutions de $\mathcal{A}$ en p à l'algèbre de Lie des champs de vecteurs $\mathfrak{g}$ sur G/H et l'action de H sur Δ à l'action de H sur G/H .

On en déduit que $(F^{-1})^*\underline{s}$ est une section de $\mathcal{V}$ définissant G sur un ouvert de G/H . En utilisant la transitivité (remarque 1.3.5), on vérifie que cette section se prolonge sur G/H . Le système est donc formellement intégrable au-dessus du complémentaire d'un ensemble analytique de Δ . $\square$

Corollaire 6.1.2 *Soit F_1 et F_2 deux solutions du système d'équations $F^*\underline{s} = s$ de source en dehors de l'ensemble analytique de non-stabilité par composition de $\mathcal{G}$. Alors*

1. *si elles ont même source, il existe g un élément de G vérifiant $F_1 = gF_2$,*
2. *si elles ont même but, il existe φ une solution formelle de $\mathcal{G}$ vérifiant $F_1 = F_2 \circ \varphi$.*

Remarque 6.1.3 *Les systèmes différentiels $F^*\underline{s} = s$ et $\varphi^*s = s$ étant involutifs et surdéterminés, le théorème de Cartan-Kähler affirme que les solutions formelles sont convergentes.*

6.2 Groupoïde de Galois et intégrales premières ; le cas transitif de rang transverse fini

Considérons un $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage. On note Z le sous-ensemble analytique en dehors duquel ce $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie est un $\mathcal{D}$ -groupoïde strict dont les équations sont involutives. Hors de Z , l'algèbre de Lie des germes en x des champs de vecteurs solutions de sa $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie est indépendante du point où on la calcule. Cette algèbre de Lie se décompose en la somme de l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteurs tangents au feuilletage et d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ des champs de vecteurs tangents à la fibration transverse que l'on a choisie en ce point.

Nous allons nous intéresser au cas où $\mathfrak{g}$ est de dimension finie. Cette algèbre est formée des solutions de la $\mathcal{D}$ -algèbre de Lie du $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie transverse $\mathcal{G}$ associé au $\mathcal{D}$ -groupoïde de Lie admissible pour le feuilletage, calculées sur une transverse en x . Elle a une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ formée des champs transverses s'annulant en x qui est intégrable par le groupe H des transformations de $\mathcal{G}$ d'isotropie de x .

Sous l'hypothèse $\mathcal{H}$, on construit comme précédemment un espace homogène G/H , modèle local pour le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie transverse $\mathcal{G}$ du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible.

Soient $\mathcal{V}$ le fibré naturel associé à $(G/H, G)$ et $\mathcal{W}$ le fibré naturel associé au $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible. Soient ω_i les k formes définissant le feuilletage. Le fibré $\mathcal{W}$ est $\mathcal{V} \times_{\Delta} \mathbb{G}_k T^* \Delta$ et l'action d'un difféomorphisme sur la fibre est l'action produit des actions sur $\mathcal{V}$ et T^* . On note alors s une section de $\mathcal{W}$ définissant le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible pour $\mathcal{F}$ et $\underline{s}$ une section de $\mathcal{V} \sim \mathcal{V} \times_{G/H} \mathbb{G}_k T^* G/H$ sur G/H définissant G .

Théorème 6.2.1 *Sous l'hypothèse $\mathcal{H}_1$, il existe une section $\underline{s}$ définissant G sur G/H telle que le système d'équations aux dérivées partielles $F^* \underline{s} = s$ dans $J^*(\Delta \rightarrow G/H)$ soit formellement intégrable en dehors de l'ensemble analytique Z de non-involutivité des équations définissant le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible. Le groupeïde d'invariance à la source de ce système est le $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible de départ et le groupeïde d'invariance au but est G .*

Preuve. – La preuve se fait comme pour la proposition 6.1.1. On commence par trouver une solution convergente. En un point p régulier pour le feuilletage, on choisit des coordonnées transverses t et des coordonnées tangentes z . On construit alors une intégrale première locale F à valeur dans G/H en utilisant la proposition 6.1.1. Cette intégrale première est construite de telle manière qu'il existe une section $\underline{s}$ de $\mathcal{V}$ définissant l'action de G sur G/H vérifiant $F^* \underline{s} = s$. En composant au but par l'action de G on obtient que par tout jet d'ordre ℓ solution du système d'équations passe une solution convergente. En composant à la source avec les solution du $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible, ceci devient valable en dehors d'une hypersurface analytique. □

Théorème 6.2.2 *Soient $\mathcal{F}$ un feuilletage admettant un $\mathcal{D}$ -groupeïde de Lie admissible de rang transverse fini, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie en un point x régulier pour le groupeïde et H le groupe algébrique d'isotropie de x . Si $\mathfrak{g}$ et H vérifient l'hypothèse $\mathcal{H}$ alors $\mathcal{F}$ admet un système complet d'intégrales premières dans une extension fortement normale de $\mathcal{M}_{\Delta}$ de groupe de Galois G .*

Preuve. – Sous l'hypothèse $\mathcal{H}$, le quotient G/H est quasi-projectif ([Sp]). Plongeons-le dans $\mathbb{P}^m$ de coordonnées $[F_0 : \dots : F_m]$ et nous noterons leur restriction à G/H de la même manière. On considère l'anneau $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow G/H)}$ et l'idéal $\mathcal{I}$ différentiablement engendré par $F^* \underline{s} = s$. Quitte à changer $\mathcal{I}$ nous supposons cet idéal premier. Les équations étant surdéterminées, cet anneau est algébriquement engendré par les images des $F_0, \dots, F_m$ ainsi que par un nombre fini de leurs dérivées. Chacune des coordonnées donne une intégrale première du feuilletage. De plus le corollaire 6.1.2 assure que deux systèmes d'intégrales premières construites en résolvant ces équations diffèrent par la composition au but par l'action d'un élément de G .

Nous allons prouver la forte normalité de l'extension $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow G/H)}/I$ de $\mathcal{O}_\Delta$. Soient $\mathcal{E}$ une extension différentielle de $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow G/H)}/I$ et σ un morphisme différentiel de $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow G/H)}/I$ dans $\mathcal{E}$ au-dessus de $\mathcal{O}_\Delta$. Ces deux morphismes seront interprétés comme des $\mathcal{E}$ -points de l'espace des zéros de $\mathcal{I}$ dans $J(\Delta \rightarrow G/H)$, c'est-à-dire des morphismes de $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow G/H)}/I \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ obtenus en prolongeant les premiers par linéarité. C'est aussi l'ensemble des idéaux maximaux de $\mathcal{O}_{J(\Delta \rightarrow G/H)}/I \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{E}$. Nous avons deux $\mathcal{E}$ -points de l'ensemble des zéros de $\mathcal{I}$, σF et F . L'action de G sur les zéros de $\mathcal{I}$ étant transitive, il existe un $\mathcal{E}$ -point de G tel que $\sigma F = g.F$. Nous allons montrer que le fait que ces points soient des points différentiels implique que g est en fait un $\mathcal{E}^c$ -point de G ($\mathcal{E}^c$ désignant le corps des constantes de $\mathcal{E}$).

Plaçons-nous dans un premier temps dans le cas où H est l'identité. Nous noterons encore F et σF les deux $\mathcal{E}$ -points de G/H définis par F et σF . En choisissant des coordonnées $g_1, \dots, g_q$ au voisinage de g sur $G_\mathcal{E}$, l'égalité $\sigma F = g.F$ s'écrit

$$(\sigma F_0, \dots, \sigma F_m) = R(g_1, \dots, g_q, F_0, \dots, F_m).$$

On obtient alors les égalités

$$\left(\sigma \frac{\partial F_0}{\partial x_i}, \dots, \sigma \frac{\partial F_m}{\partial x_i}\right) = \sum \frac{\partial R}{\partial F_j}(g, F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

en prolongeant l'action de g sur les premières dérivées et

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sigma F_0, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i} \sigma F_m\right) = \sum \frac{\partial R}{\partial g_j}(g, F) \frac{\partial g_j}{\partial x_i} + \sum \frac{\partial R}{\partial F_j}(g, F) \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

en dérivant. La matrice $\frac{\partial R}{\partial g_j}$ est inversible donc les dérivées partielles $\frac{\partial g_j}{\partial x_i}$ sont toutes nulles. Ceci revient à dire que g est un élément de $G_{\mathcal{E}^c}$. On prouve ainsi la forte normalité de l'extension.

On se ramène au cas précédent en choisissant un entier k assez grand pour que l'action de G sur $J_k(\Delta \rightarrow G/H)$ soit libre. Notons F le $\mathcal{E}$ -point de $J_k(\Delta \rightarrow G/H)$ déterminé par l'extension et σF celui donné par le morphisme σ . Le même calcul en coordonnées donne que g est bien un point "constant" de G . $\square$

Bibliographie

- [Au] M. Audin - *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Cours Spécialisés, **8** Société Mathématique de France, Paris ; EDP Sciences, Les Ulis (2001)
- [B-M] F. Berteloot et V. Mayer - *Rudiments de dynamique holomorphe*, Cours Spécialisés, **7** Société Mathématique de France, Paris ; EDP Sciences, Les Ulis (2001)
- [Bu1] A. Buium - *Differential function fields and moduli of algebraic varieties*, Lecture Notes in Mathematics **1226**, Springer-Verlag (1986)
- [Bu2] A. Buium - *Differential algebra and diophantine geometry*, Actualités Mathématiques, Hermann (1994)
- [B-T] M. Berthier et F. Touzet - *Sur l'intégration des équations différentielles holomorphes réduites en dimension 2*, Boletim da Soc. Bra. Mat. vol **30**, n°**3** (1999)
- [Ca1] E. Cartan - *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Ec. Normale t. **21** (1904) & t. **22** (1905) dans Œuvres complètes Partie II vol. 2
- [Ca2] E. Cartan - *La structure des groupes infinis*, Séminaire de Math. exposés G et H (1937) dans Œuvres complètes Partie II vol. 2
- [Cas1] G. Casale - *Suites de Godbillon-Vey et intégrales premières*, C. R. Acad. Sci. Paris **335** (2002)
- [Cas2] G. Casale - *$\mathcal{D}$ -enveloppe d'un difféomorphisme de $(\mathbb{C}, 0)$* "Proceedings of the conference *Resurgence, Alien Calculus, Resummability, Transseries*" à paraître aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse (2004)
- [Du] H. Dulac - *Recherche sur les points singuliers des équations différentielles*, J. École Polytechnique **2**, **9** (1904)
- [Dum] S. Dumitrescu - *Structures géométriques holomorphes sur les variétés complexes compactes*, Ann. Sci. Écoles Normale Sup., 4^e série, t. **34** (2001)
- [Dr1] J. Drach - *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendentes*, Ann. Sci. Écoles Normale Sup. (1898)
- [Dr2] J. Drach - *Sur le problème logique de l'intégration des équations différentielles*, Ann. Fac. Sci. de l'Université de Toulouse (1908)

- [Ec] J. Écalle - *Les fonctions résurgentes Tomes 1 et 2*, Publications mathématiques d'Orsay (1981)
- [Ei] D. Eisenbud - *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Graduate Text in Mathematics **150** Springer-Verlag (1995)
- [Er] A.E. Eremenko - *Some functional equations connected with the iteration of rational functions* Leningrad Math. J. **1**, no. **4** (1990)
- [Fa] P. Fatou - *Sur l'itération analytique et les substitutions permutables* J. Math. **2** (1923)
- [Fr] J. Frisch - *Points de platitude d'un morphisme d'espaces analytiques complexes*, Invent. Math. **4** (1967)
- [Go] C. Godbillon - *Feuilletage. Études géométriques*, Progress in Mathematics **98** (1991)
- [G-V] C. Godbillon et J. Vey - *Un invariant des feuilletages de codimension un*, C. R. Acad. Sci. Paris **273** (1971)
- [Gr] M. Gromov - *Rigid transformation groups*, Géométrie Différentielle, Travaux en cours, Hermann, **33** (1988)
- [Il] Y.S. Ilyashenko - *Divergence of series that reduce an analytic differential equation to linear normal form at a singular point*, (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. **13** n° **3** (1979)
- [Ju] G. Julia - *Mémoire sur la permutabilité des fractions rationnelles* Ann. Sci. École Norm. Sup. **39** (1922)
- [Ko] E.R. Kolchin - *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Pure and Applied Mathematics, Vol. **54**. Academic Press, (1973)
- [Kob] S. Kobayashi - *Transformation Groups in Differential Geometry* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **70**. Springer-Verlag (1972)
- [Kov] J.J. Kovacic - *The differential Galois theory of strongly normal extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003)
- [Lie] S. Lie - *Transformationgruppen Tome 3*, Chelsea Publishing Co., (1970).
- [Lo] F. Loray - *Analyse des séries divergentes*, dans "Quelques aspects des mathématiques actuelles" Aziz El Kacimi Alaoui, Hervé Queffélec, Carlos Sacré, Valerio Vassallo, Ellipse (1998)
- [Mck] K. Mackenzie - *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry*, L.N.S. **124** Cambridge Univ. Press Cambridge (1987)
- [Mag] A.R. Magid - *Lectures on differential Galois theory*, University Lecture Series **7** American Mathematical Society, Providence, RI (1994)
- [Ma1] B. Malgrange - *Travaux d'Écalle et de Martinet-Ramis sur les systèmes dynamiques* 34, séminaire Bourbaki 1981/82, n° 582
- [Ma2] B. Malgrange - *Sur un théorème de Maillet*, Asymptotic analysis **2** (1989)

- [Ma3] B. Malgrange - *L'involutivité générique des systèmes différentiels analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **326** (1998)
- [Ma4] B. Malgrange - *Germes de $\mathcal{D}$ -groupoïdes en dimension un*, (notes informelles) (2000)
- [Ma5] B. Malgrange - *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*, Monographie **38** vol **2** de L'enseignement mathématique (2001)
- [Ma6] B. Malgrange - *On the non linear Galois differential theory*, Chinese Ann. Math. Ser. B **23** n°**2**, (2002)
- [Ma7] B. Malgrange - *Systèmes Différentiels Involutifs*, Prépublication de l'Institut Fourier n°**636**, (2004)
- [M-M] J.F. Mattei et R. Moussu - *Holonomie et intégrale première*, Ann. Sci. École Normale Sup. **13** (1980)
- [M-R1] J. Martinet et J.P. Ramis - *Problèmes de modules pour les équations différentielles non linéaires du premier ordre.*, Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. **55** (1982)
- [M-R2] J. Martinet et J.P. Ramis - *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre.*, Ann. Sci. École Normale Sup. **16** (1983)
- [Mo] J. Morales Ruiz - *Differential Galois theory and non-integrability of Hamiltonian systems*, Progress in Mathematics, **179** Birkhäuser Verlag, Basel, (1999)
- [Mu] S. Mukai - *An introduction to invariants and moduli*, Translated from the 1998 and 2000 Japanese editions by W. M. Oxbury. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **81** Cambridge University Press, Cambridge (2003)
- [Ol] P.J. Olver - *Equivalence, Invariants, and Symmetry*, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [Po] J.F. Pommaret - *Differential Galois Theory*, Mathematics and its Applications, **15**. Gordon Breach Science Publishers, New York (1983)
- [P-S] M.J. Prele et M.F. Singer - *Elementary first integrals of differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983)
- [Ra] J.P. Ramis - *Séries Divergentes et Théories Asymptotiques*, Panorama et Synthèse **1** S.M.F. (1993)
- [Ri1] J.F. Ritt - *Permutable rational functions*, Trans. A. M. S. **25** (1923)
- [Ri2] J.F. Ritt - *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **XXXIII**, American Mathematical Society, New York (1950)
- [Sc] B.A. Scàrdua - *Transversely affine and transversely projective holomorphic foliations*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **30** (1997)

- [Se] A. Seidenberg - *Reduction of singularities of the differential equation $A dy = B dx$* , Amer. J. Math. **90** (1968)
- [Si] M. Singer - *Liouvillian first integral of differential equations*, Trans. A. M. S. **333** (1992)
- [Sp] T.A. Springer - *Linear Algebraic Groups* Second edition. Progress in Mathematics, **9** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (1998)
- [St] S. Sternberg - *Lectures on differential geometry*, Second edition. Chelsea Publishing Co. (1983)
- [To] J.C. Tougeron - *Idéaux de fonctions différentiables*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **71**, Springer-Verlag (1972)
- [Tou1] F. Touzet - *Equation différentielles admettant des solutions liouvilliennes*, thèse de l'Université de Rennes I (1995)
- [Tou2] F. Touzet - *Sur les feuilletages holomorphes transversalement projectifs*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **53**, 3 (2003)
- [Ves1] E. Vessiot - *Sur une théorie générale de la réductibilité des équations et systèmes d'équations finies ou différentielles*, Ann. Sci. École Normale Sup. **63** (1946)
- [Ves2] E. Vessiot - *Sur la réductibilité des équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre, à une inconnue, qui ne la contiennent pas et sont linéaires et homogènes par rapport à ses dérivées*, Bull. Soc. Math. France **75** (1947)
- [Ve] A.P. Veselov - *What Is an Integrable Mapping ?* dans What is integrability ? V.E. Zakharov (Ed.), Springer Series in Nonlinear Dynamics (1991)