UNE PREUVE GALOISIENNE DE L'IRRÉDUCTIBILITÉ AU SENS DE NISHIOKA-UMEMURA DE LA PREMIÈRE ÉQUATION DE PAINLEVÉ

– GUY CASALE –

Table des matières

Introduction

La question de l'irréductibilité d'une équation différentielle à été étudiée de manière approfondie par P.Painlevé depuis les *Leçons de Stokholm* [12]. Une première définition d'équation différentielle ordinaire réductible a été donnée par P.Painlevé et sera ensuite formalisée par K.Nishioka [11]. Une équation d'ordre n est dite réductible si on peut exprimer une solution rationnellement après avoir résolu successivement des équations différentielles linéaires, abéliennes (dont les solutions sont des fonctions abéliennes) ou d'ordre strictement plus petit que n.

Après avoir étudier l'irréductibilité des équations du premier ordre, Painlevé se pose la question de l'irréductibilité de la première des équations d'ordre deux sans singularités mobiles qu'il a découvert :

$$(P_1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x.$$

Il prouve dans [13] qu'au moins une solution de cette équation est irréductible puis affirme dans [14] avoir déterminé le «groupe de rationalité de J.Drach» de cette équation et prouver ainsi son irréductibilité «absolue». Le groupe de rationalité utilisé par P.Painlevé provient d'une tentative de J.Drach de mettre en place une théorie «de la rationalité» (ou «de Galois») valide pour toute équation différentielle [4]. Malheureusement, les travaux de J.Drach sont entachés d'erreurs.

À la fin des années soixante-dix, l'école japonaise reprend et continue les travaux de Painlevé sur les équations sans singularité mobile. Une preuve de l'irréductibilité de P_1 est enfin obtenue par K.Nishioka [11] puis par H.Umemura [17, 18]. Récemment l'étude géométrique des variétés de conditions initiales des équations sans singularité mobile [16] a permis à M.-H.Saito et H.Terajima d'obtenir une autre preuve de l'irréductibilité de cette équation. Aucune de ces preuves n'utilise une «théorie de Galois générale».

Ce type de théorie a été mis en place indépendamment par H.Umemura [19] et B.Malgrange [10] à la fin du vingtième siècle, achevant les travaux de J.Drach et E.Vessiot ([20, 21]). Dans cet article nous présentons une nouvelle preuve de l'irréductibilité de la première équation de Painlevé utilisant le groupoïde de Galois de cette équation [10, 3]. Ce dernier a été calculé dans [3] en complétant les calculs de J.Drach [5]. La détermination du groupoïde de Galois permet de montrer différents types de résultats concernant la réductibilité ou l'irréductibilité d'une équation. L'irréductibilité au sens de Drach-Vessiot ainsi que l'irréductibilité au sens des feuilletages de P_1 ont été prouvées dans [3]. Nous expliquons ici les relations entre le groupoïde de Galois d'une équation et son irréductibilité au sens de Painlevé-Nishioka-Umemura dans le cas particulier de la première équation de Painlevé.

Cet article est constitué de cinq parties. Dans la première, nous rappelons les définitions d'irréductibilité et de modèles pour des corps différentiels. Nous étudions ensuite rapidement la géométrie transverse des feuilletages donnés par les types d'extensions utilisés pour «réduire» une équation. Dans la troisième partie nous rappelons la définition du groupoïde de Galois d'un feuilletage suivant B.Malgrange [10] et présentons quelques exemples. Après avoir fait les rappels nécessaire sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs formels, nous prouvons l'irréductibilité au sens de Nishioka-Umemura de la première équation de Painlevé.

1. Définitions et modèles géométriques

Commençons par rappeler la définition de réductibilité d'une équation différentielle du second ordre suivant Nishioka-Umemura [12, 11, 17]. Les corps différentiels (K,δ) seront toujours de type fini sur $\mathbb{C}$ et auront pour corps de constantes $K^\delta = \mathbb{C}$.

Définition 1.1 (réductibilité [11, 17])**.** *Soit (K,δ) un corps différentiel ordinaire et $E : \delta^2 y = F(y, \delta y) \in K(y,\delta y)$ une* équation différentielle du second ordre *sur K. L'équation E est dite* réductible *si il existe une solution dans une extension différentielle L de K construite de la manière suivante :*

$$K = K_0 \subset K_1 \ldots \subset K_m = L$$

avec pour tout i,
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension algébrique,
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension de Picard-Vessiot, *c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(f_j^p; 1 \le p, j \le n)$ avec $\delta f_j^p = \sum_k A_j^k f_k^p$, $A_j^k \in K_i$ et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$.*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension abélienne, *c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(\varphi_j(a_1,\ldots,a_n); 1 \le j \le n)$ les φ_j formant une base du corps des fonctions d'une variété abélienne, les a_j appartenant à K_i et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$,*
- *soit $K_i \subset K_{i+1}$ est une* extension d'ordre un, *c'est-à-dire $K_{i+1} = K_i(z)$ avec $P(z,\delta z) = 0$ et $P \in K_i(z,\delta z)$ et $K_i^\delta = K_{i+1}^\delta$.*

Une extension différentielle $K \subset L$ du type précédent sera dite réductrice. *Les extensions intermédiaires $(K_i \subset K_{i+1})$ décrites ci-dessus seront dites* élémentaires.

Dans la suite le corps différentiel de base sera $(\mathbb{C}(x), \frac{d}{dx})$. Nous allons décrire les modèles géométriques des extensions élementaires. Le corps $\mathbb{C}(x)$ sera le corps des fractions de la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{C})$ et sa structure différentielle sera donnée par le champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$.

Définition 1.2. *Un modèle pour une extension différentielle (K,δ) de $\mathbb{C}$ de type fini est une variété algébrique affine Y sur $\mathbb{C}$ de corps de fractions K munie du champ de vecteur δ_Y induit par δ.*

Soient $K \subset L$ une extension différentiel de type finie, (Y, δ_Y) et (Z, δ_Z) des modèles respectivement de K et de L. L'inclusion des corps donne une application dominante $\pi : Z \dashrightarrow Y$ et la compatibilité des dérivations dit que le champ δ_Z est π-projetable d'image δ_Y.

Définition 1.3. *Une application rationnel $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ entre variétés munies des champs de vecteurs respectifs δ_Z et δ_Y sera dite différentielle si $\overline{\varphi(Z)}$ est δ_Y-invariante et δ_Z est φ-projetable sur $\delta_X|_{\overline{\varphi(Z)}}$*

Les applications différentielles entre modèles induites par les morphismes élémentaires seront appelés élémentaires. Voici une description succinte de ces applications.

Extensions algébriques – En restriction à des ouverts convenables, elles correspondent aux applications finies étales $Z \to Y$. Le champ sur Y se relève de manière unique sur Z.

Extensions de Picard-Vessiot – Ces applications se construisent à partir de (Y, δ_Y) en considérant le produit $Y \times GL_n(\mathbb{C})$ muni du champ de vecteurs

$$\delta_{Y\times GL_n(\mathbb{C})} = \delta_Y + \sum_{j,k,p} A_j^k g_k^p \frac{\partial}{\partial g_j^p}$$

où les g_j^p sont les coordonnées standart de $GL_n(\mathbb{C})$ et $(A_j^k) \in GL_n(\mathbb{C}(Y))$. Un extension de Picard-Vessiot est une sous-variété minimal Z de $Y \times GL_n(\mathbb{C})$, $\delta_{Y\times GL_n(\mathbb{C})}$-invariante, telle que la projection induite de Z sur Y soit dominante. Par construction, cette projection est différentielle et il n'est pas difficile de montrer que l'extension de corps induite ne dépend pas du choix de Z.

Extensions abéliennes – Soit Γ un réseau de $\mathbb{C}^n$ tel que $A = \mathbb{C}^n/\Gamma$ soit une variété abélienne. Le corps des fonctions Γ-périodiques $\mathbb{C}(A)$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ pour certaines fonctions indépendantes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Il existe donc des fonctions algébriques de n variables $F_{i,j}$, $0 \leq i, j \leq n$, telles que

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ n fonctions sur une variété Y. Considérons $Y \times A$ muni du champ de vecteurs

$$\delta_{Y\times A} = \delta_Y + \sum_{i,j} \delta_Y(a_j) F_{i,j}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}.$$

Un extension abélienne est une sous-variété minimal Z de $Y \times A$, $\delta_{Y\times A}$-invariante, telle que la projection induite de Z sur Y soit dominante.

Extensions d'ordre un – Une telle extension est donnée par une produit $Y \times L$ où L est de dimension un et par un relevé $\delta_{Y\times L}$ de δ_Y sans intégrales première rationnelles.

La définition 1.1 se réécrit alors :

Définition 1.1.bis *Soient (X, δ_X) une variété algébrique affine sur $\mathbb{C}$ muni d'un champ de vecteurs et $\pi : (X, \delta_X) \dashrightarrow (\mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \frac{\partial}{\partial x})$ une application différentielle dominante. Le champs δ_X est dit* réductible *si il existe une famille d'applications différentielles dominantes $\pi_i : (Y_i, \delta_i) \dashrightarrow (Y_{i-1}, \delta_{i-1})$ pour $1 \leq i \leq m$ de type* élémentaires *avec $(Y_0, \delta_0) = (\mathbb{A}^1(\mathbb{C}), \frac{\partial}{\partial x})$ et une application différentiel $\varphi : (Y_m, \delta_m) \dashrightarrow (X, \delta_X)$ dite* réductrice.

2. Structures transverses des extensions réductrices

Les structures transverses que nous étudierons sont données par des suites de formes rationnelles commençant par une base de formes nulles sur les trajectoires du champ de vecteurs et satisfaisant certaines identités différentielles. Ces suites sont aussi appelées suites de Godbillon-Vey ou équations de structures. Soient (Y, δ_Y) une variété munie d'un champ de vecteurs, N_Y le $\mathbb{C}(Y)$-espace vectoriel des formes sur Y s'annullant sur δ_Y et d_Y une forme rationnelle telle que $d_Y(\delta_Y) = 1$.

Extensions algébriques – Si Z est un revètement étale de Y, le relevé de δ_Y est unique et l'annulateur de ce relevé est $N_Z = \mathbb{C}(Z) \otimes_{\mathbb{C}(Y)} N_Y$. Pour cette raison la géométrie transverse locale de ces extensions est triviale.

Extensions de Picard-Vessiot – Soit Z une extension de Picard-Vessiot de Y. Les formes de N_Y s'annullent sur δ_Z. Une famille génératrice de l'espace des formes s'annullant sur δ_Z complétant N_Y est donnée par la matrice de formes suivante :

$$\Theta = G^{-1}dG - G^{-1}AGd_Y$$

où G est la matrice des coordonnées (g_j^p) de $GL_n(\mathbb{C})$ restreinte à Z. On vérifie que

$$d\Theta = -\Theta \wedge \Theta \text{ modulo } N_Y.$$

Cette identité traduit la structure de feuilletage de Lie linéaire de ce type d'équation au-dessus des trajectoires de δ_Y (*i.e.* modulo N_Y) ([6]).

Extensions abéliennes – Soient $Z \subset Y \times A$ une extension abélienne de Y et $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ une base de fonctions sur la variété abélienne A. Ces fonctions étant indépendantes, $\det(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}) \neq 0$. Nous noterons $(F_{i,j}^{-1})_{i,j}$ la matrice inverse de $(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j})_{i,j}$. Une famille génératrice de l'espace des formes s'annullant sur δ_Z complétant N_Y est donnée par

$$\eta_j = \sum_i F_{i,j}^{-1} d\varphi_i - \delta_Y(a_j) d_Y.$$

Ces formes sont fermées modulo N_Y.

Extensions d'ordre un – Soit $Z \dashrightarrow Y$ une extension d'ordre un et θ une forme rationnelle s'annullant sur δ_Z indépendante des formes de N_Y. Il existe une suite de formes rationnelles sur Z satisfaisant les égalités :

$$\begin{aligned} d\theta &= \theta \wedge \theta_1 \quad \text{mod } N_Y, \\ d\theta_1 &= \theta \wedge \theta_2 \quad \text{mod } N_Y, \\ \text{et pour tout } & n \in \mathbb{N} : \\ d\theta_n &= \theta \wedge \theta_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \theta_k \wedge \theta_{n-k+1} \quad \text{mod } N_Y. \end{aligned}$$

Une telle suite est appelée suite de Godbillon-Vey générale de codimension un modulo N_Y.

Structure transverse d'une extension réductrice – Soit

$$(Y_m, \delta_m) \overset{\pi_{m-1}^m}{\dashrightarrow} (Y_{m-1}, \delta_{m-1}) \overset{\pi_{m-2}^{m-1}}{\dashrightarrow} \ldots \overset{\pi_1^2}{\dashrightarrow} (Y_1, \delta_1) \overset{\pi_0^1}{\dashrightarrow} (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$$

une extension réductrice de la droite affine. Le feuilletage définie par le champ de vecteurs δ_m sur la variété Y_m admet une structure géométrique transverse particulière. Le $\mathbb{C}(Y_m)$-espace vectoriel des formes qui s'annullent sur δ_m est engendré par une famille filtrée de formes $\Omega = \cup_{i=1}^m \Omega(i)$ telle que $\Omega(i)$ engendre $\mathbb{C}(Y_m) \otimes_{\mathbb{C}(Y_i)} N_{Y_i}$ et $\Omega(i) - \Omega(i-1)$ soit

- une famille de formes satisfaisant des identité différentielles de type linéaire modulo $N_{Y_{i-1}}$,
- une famille de formes fermées modulo $N_{Y_{i-1}}$,
- ou bien une forme intégrable modulo $N_{Y_{i-1}}$.

Ces formes différentielles donnent une famille de feuilletages sur Y_m :

$$\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_{m-1} \subset \ldots \subset \mathcal{F}_1,$$

la géométrie transverse de $\mathcal{F}_i$ relative à $\mathcal{F}_{i-1}$ étant linéaire, de translation ou de codimension un.

Exemple 2.1 (Malgrange)**.** *La suite d'extensions élémentaires suivante*

$$\left(\mathbb{A}^3, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial z}\right) \dashrightarrow \left(\mathbb{A}^2, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y}\right) \dashrightarrow \left(\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

donne sur $\mathbb{A}^3$ un feuilletage de codimension un défini par la forme fermée $\eta_1 = dy - \frac{dx}{x}$ et un feuilletage de codimension deux définie par la forme $\eta_2 = dz - \frac{dx}{x-y}$ fermée modulo η_1.

3. Groupoïde de Galois

Soit Y une variété algébrique affine lisse et irréductible sur $\mathbb{C}$ de dimension n. Nous noterons $J^*(Y)$ l'espace des difféomorphismes formels $\overline{y} : \widehat{Y,a} \to \widehat{Y,b}$, pour tout couples de points (a, b). Cet espace est un groupoïde algébrique sur Y pour les lois de composition et d'inversion évidentes [10, 9]. Nous noterons Y la variété source et $\overline{Y}$ la variété but. Son anneau de fonctions régulières est

$$\mathcal{O}(J^*(Y)) = \mathcal{O}(Y) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{Y}) \left[\, \overline{y}_i^\alpha \;|1 \leq i \leq n, \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 < |\alpha|\right].$$

Dans des coordonnées locales $(y_1, \ldots, y_n)$ sur Y et $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ les mêmes coordonnées sur $\overline{Y}$, cet anneau est muni de dérivations dites totales définies par :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ 1 \leq j \leq n}} \overline{y}_j^{\alpha+\epsilon(i)} \frac{\partial}{\partial \overline{y}_j^\alpha}$$

où $\epsilon(i)$ est le vecteur de coordonnées nulles sauf la i-ème égale à un et $\overline{y}_j^0$ est égal à $\overline{y}_j$.

Ces champs définissent une connexion $D : \mathcal{O}(J^*(Y)) \to \mathcal{O}(J^*(Y)) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \Omega^1(Y)$ en recollant sur $Y \times \overline{Y}$ les formules locales $Df = \sum_i D_i f \otimes dy_i$

Définition 3.1 (Malgrange [10])**.** *Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Y est un sous-espace $G \subset J^*(Y)$ défini par un idéal radical différentiel de $\mathcal{O}(J^*(Y))$ tel qu'en dehors d'une sous-variété S de Y, la restriction de G soit un sous-groupoïde de $J^*(Y - S)$ (au sens schématique).*

Exemples 3.2. 1°) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de Y donné par un système de formes ω_i, $1 \leq i \leq q$, intégrables (i.e. $\bigwedge_{i=1}^q \omega_i \wedge d\omega_j = 0$ pour tout j). Les difféomorphismes formels préservant le feuilletage*[1] *sont les solutions formelles d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie dont l'idéal est engendré par les coordonnées des équations $\bigwedge_{i=1}^q \omega_i \wedge \overline{y}^*\omega_j = 0$ pour $1 \leq j \leq q$. Il sera noté $Aut(\mathcal{F})$*

2°) *Soit $\pi : Y \dashrightarrow X$ une application rationnelle. Elle définie un feuilletage sur Y dont le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie d'invariance sera noté $Aut(\pi)$.*

3°) *On peut aussi considérer le $\mathcal{D}$-groupoïde d'invariance de π : $Inv(\pi)$ défini par les coordonnées de $\pi(\overline{y}) - \pi(y) = 0$ qui est naturellement inclus dans le précédent.*

4°) *Soient θ une p-forme et ω une q-forme sur Y le groupoïde d'invariance de θ modulo ω : $Inv(\theta \mod \omega)$ est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie dont l'idéal est différentiellement engendré par les coordonnées de $(\overline{y}^*\theta - \theta) \wedge \omega = 0$*

Remarque 3.3. *Les transformations tangentes aux feuilles d'un feuilletage n'étant pas caractérisées a priori par des équations différentielles, le troisième exemple n'a pas de sens pour un feuilletage sans intégrales premières rationelles.*

Un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie a une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie formée par les champs de vecteurs formels dont les flots appartiennent au $\mathcal{D}$-groupoïde. Soient $(y_1, \ldots, y_n)$ des coordonnées locales sur Y. Les champs de vecteurs $\sum_i a_i(y)\frac{\partial}{\partial y_i}$ dont les flots sont solutions d'une équation $E \in \mathcal{O}(J^*(Y))$ d'ordre q sont eux mêmes solutions d'un équation d'ordre q appelée équation linéarisée le long de l'identité :

$$\mathcal{L}(E) = \sum_{i,\alpha} \frac{\partial E}{\partial y_i^\alpha}(id)\ a_i^\alpha$$

où id est l'application de Y dans $\mathcal{O}(J^*(Y))$ telle que $id^*y_i = y_i$, $id^*\overline{y}_i = y_i$, $id^*\overline{y}_i^{\epsilon(j)} = \delta_i^j$ et $id^*\overline{y}_i^\alpha = 0$ pour $|\alpha| > 1$, et a_i^α est la dérivée d'ordre $|\alpha|$ de a_i par rapport à y.

Définition 3.4. *Soit $I \subset \mathcal{O}(J^*(Y))$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G et S son lieu "singulier". L'idéal $\mathcal{L}(I)$ engendré par $\{\mathcal{L}(E), E \in I\}$ décrit en dehors de S un sous-fibré vectoriel de l'espace $J(TY)$ des champs de vecteurs formels sur Y. C'est la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de G notée $\mathcal{L}G$.*

En dehors de S, les solutions formelles de la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sont stables par le crochet de Lie [10]. Dans *loc. cit.* une définition de $\mathcal{D}$-algèbre de Lie dont les objets ci-dessus ne sont qu'un cas particulier est donnée. Cette notion englobe en particulier les feuilletages (algébriques singuliers) de Y. Avec cette définition, il arrive qu'une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie ne soit pas la $\mathcal{D}$-algèbre d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie. Dans le cas d'un feuilletage, cela conduit à la définition suivante :

Définition 3.5 ([10])**.** *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage (algébrique, singulier) de Y. Le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie G tel que $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}G$. Il sera noté $Gal(\mathcal{F})$.*

Remarque 3.6. *Soient I l'idéal de G et $Ann(\mathcal{F})$ l'idéal différentiel des équations différentielles en les a_i s'annulant sur les champs $\sum a_i\partial/\partial x_i$ tangents à $\mathcal{F}$. L'inclusion $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}G$ doit se lire $\mathcal{L}(I) \subset Ann(\mathcal{F})$.*

Cet objet généralise le groupe de Galois différentiel d'une équation différentielle linéaire. Dans le cas d'un modèle (Y, δ_Y) d'un corps différentiel ordinaire, nous noterons $\mathcal{F}_Y$ le feuilletage de Y défini par le champ de vecteurs δ_Y. Le groupoïde $Gal(\mathcal{F}_Y)$ sera aussi appelé groupoïde de Galois du corps différentiel $(\mathbb{C}(Y), \delta_Y)$. Dans le cas d'une extension de $(\mathbb{C}(x), \frac{\partial}{\partial x})$, $\pi : (Y, \delta_Y) \to (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$, la partie significative de $Gal(\mathcal{F}_Y)$ est le $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie $Gal(\mathcal{F}_Y) \cap Inv(\pi)$. Lorsque cette extension est de type Picard-Vessiot, on obtient ainsi un fibré en groupe au-dessus d'un ouvert de $\mathbb{A}^1$ dont la fibre est un représentant du groupe de Galois abstrait donné par la théorie de Picard-Vessiot.

Exemples 3.7 (Malgrange)**.** *Notons x, y, z des coordonnées sur $\mathbb{A}^3$ et $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}$ les mêmes coordonnées sur une copie de cet espace : $\overline{\mathbb{A}^3}$.*

[1] aussi appelés difféomorphismes basiques

1°) *Le groupoïde de Galois de $(\mathbb{A}^2, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y})$ est décrit par l'invariance de la forme $\eta_1 = dy - \frac{dx}{x}$. Son idéal est engendré par*

$$\frac{1}{x}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{y}}{\partial x} - \frac{1}{x} = 0 \quad et \quad \frac{1}{x}\frac{\partial \overline{x}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{y}}{\partial y} + 1 = 0.$$

Les solutions formelles de sa $\mathcal{D}$-algèbre de Lie sont les champs $X = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y}$ vérifiant

$$\frac{1}{x}\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial x} = 0 \quad et \quad \frac{1}{x}\frac{\partial a_1}{\partial x} - \frac{\partial a_2}{\partial x} = 0 \quad (\text{équations d'invariance infinitésimale de } \eta_1).$$

Considérée comme extension de $(\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$, la partie significative du groupoïde de Galois de $(\mathbb{A}^2, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y})$ s'obtient en posant $\overline{x} = x$. Les équations se réduisent à

$$\frac{\partial \overline{y}}{\partial x} = 0 \quad et \quad \frac{\partial \overline{y}}{\partial y} - 1 = 0$$

dont les solutions sont les difféomorphismes $\begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = y + c \end{cases}$ *pour $c \in \mathbb{C}$.*

2°) *Le groupoïde de Galois de $\left(\mathbb{A}^3, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial z}\right)$ est inclus dans le groupoïde décrit par l'invariance de η_1 et par l'invariance de $\eta_2 = dz - \frac{dx}{x-y}$ modulo η_1. Son idéal contient donc les équations de l'exemple précédent plus*

$$\frac{\partial \overline{z}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{x}}{\partial z}\frac{1}{\overline{x} - \overline{y}} - 1 = 0 \quad et \quad \frac{1}{x}\frac{\partial \overline{z}}{\partial y} - \frac{1}{x}\frac{\partial \overline{x}}{\partial y}\frac{1}{\overline{x} - \overline{y}} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\frac{1}{\overline{x} - \overline{y}} + \frac{1}{x - y} = 0.$$

Les solutions formelles de sa $\mathcal{D}$-algèbre de Lie sont les champs $X = a_1\frac{\partial}{\partial x} + a_2\frac{\partial}{\partial y} + a_3\frac{\partial}{\partial z}$ vérifiant les équations d'invariance de η_1 plus

$$\frac{\partial a_3}{\partial z} - \frac{1}{x - y}\frac{\partial a_1}{\partial z} = 0 \quad et \quad \frac{1}{x}\frac{\partial a_3}{\partial y} - \frac{1}{x}\frac{1}{x - y}\frac{\partial a_1}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial x} - \frac{1}{x - y}\frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{1}{(x - y)^2}a_2 = 0$$

La partie significative du groupoïde de Galois de cette extension de $(\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$ a donc pour équation :

$$\overline{x} = x,\ \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} - 1 = 0,\ \frac{1}{x}\frac{\partial \overline{z}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{z}}{\partial x} - \frac{1}{x - \overline{y}} + \frac{1}{x - y} = 0.$$

Les solutions sont

$$\begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{y} = y + c \\ \overline{z} = z + f(x, y) \end{cases}, \ \text{avec } c \in \mathbb{C} \text{ et } \frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x - y - c} - \frac{1}{x - y}.$$

Dans des coordonnées analytiques locales (x, ℓ, p) où $\ell = \int \eta_1$ et $p = \int_{\ell = cste} \eta_2$, les solutions de ces équations s'écrivent

$$\begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{\ell} = \ell + c \\ \overline{p} = p + f(\ell) \end{cases}, \ \text{avec } c \in \mathbb{C} \text{ et } f \text{ une fonction quelconque.}$$

Exemples 3.8. 1°) *Soit $\mathcal{F}$ un feuilletage de Lie linéaire* [6] *donné par une matrice de n^2 formes rationnelles $\Theta = (\theta_i^j)_{ij}$ vérifiant*

$$d\Theta = \Theta \wedge \Theta.$$

Les champs X tangents au feuilletage $(\Theta(X) = 0)$ préservent la forme Θ :

$$L_X\Theta = \iota_X d\Theta + d\iota_X\Theta = 0.$$

Le groupoïde de Galois de $\mathcal{F}$ est donc inclus dans $Inv(\Theta)$, le groupoïde d'invariance des formes θ_i^j, $1 \leq i, j \leq n$.

2°) *Soit $(Z, \delta_Z) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ une extension de Picard-Vessiot. On note $\mathcal{F}_Z$ le feuilletage définit par δ_Z, $\mathcal{F}_Y$ le feuilletage de Z que l'on obtient en ramenant le feuilletage défini par δ_Y Soient $\omega_1, \ldots, \omega_q$ une base de formes s'annulant sur $\mathcal{F}_Y$ et θ_i^j, $1 \leq i, j \leq n$, les formes définissant $\mathcal{F}_Z$ satisfaisant $d\theta_i^j = \sum_k \theta_i^k \wedge \theta_k^j \mod \omega_1, \ldots, \omega_q$. On a évidemment $Gal(\mathcal{F}_Z) \subset Gal(\mathcal{F}_Y) \subset Aut(\mathcal{F}_Y)$. De plus comme les champs X*

tangents à $\mathcal{F}_Z$ satisfont $L_X(\theta_i^j) = 0 \mod \omega_1, \ldots, \omega_q$, $1 \leq i, j \leq n$, on a $Gal(\mathcal{F}_Z) \subset Gal(\mathcal{F}_Y) \cap Inv(\theta_i^j \mod \omega_1, \ldots, \omega_q\ ;\ 1 \leq i, j \leq n)$.

Le groupoïde de Galois de le première équation de Painlevé est le groupoïde de Galois du feuilletage défini par $\delta_P = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x)\frac{\partial}{\partial z}$ sur $\mathbb{A}^3$.

Théorème 3.9 ([3])**.** *Le groupoide de Galois de la première équation de Painlevé est le $\mathcal{D}$-groupoide de Lie d'invariance $Inv(\gamma)$ de la 2-forme $\gamma = dy \wedge dz - zdx \wedge dz + (6y^2 + x)dx \wedge dy$.*

La partie significative du groupoïde de Galois de $(\mathbb{A}^3, \delta_P) \to (\mathbb{A}^1, \frac{\partial}{\partial x})$ est $Inv(\gamma) \cap Inv(x)$. Dans des coordonnées analytiques locales x, h, k avec $dh \wedge dk = \gamma$, ses solutions sont de la forme :

$$\begin{cases} \overline{x} = x \\ \overline{h} = \overline{h}(h,k) \\ \overline{k} = \overline{k}(h,k) \end{cases}, \quad \text{avec} \quad \frac{\partial(\overline{h}, \overline{k})}{\partial(h,k)} = 1.$$

4. Algèbres de Lie de champs de vecteurs

Nous aurons besoin dans la preuve du théorème d'irréductibilité de quelques faits sur les algèbres de Lie de champs de vecteurs. L'algèbre des champs formels sur $\widehat{\mathbb{C}^n, 0}$ sera noté χ^n et l'espace des champs s'annulant à l'ordre k sera χ^n_k. Pour une algèbre de Lie de champs de vecteurs formels A, on notera $A_k = A \cap \chi^n_k$ la filtration induite.

Définition 4.1. *Soit A un algèbre de Lie de champs formels. La croissance de A est la suite d'entier $n_k(A) = \dim_{\mathbb{C}} A/A_k$. Le plus petit entier p tel que la suite $\frac{n_k(A)}{k^p}$ soit bornée est le type de l'algèbre A.*

Une algèbre de type 0 sera aussi appelée de type fini, celles de types 1 seront dites de type linéaire etc ...

Définition 4.2. *Soient A une algèbre de Lie de champs formels et $\mathcal{F}$ est un feuilletage de codimension q régulier A-invariant de $\widehat{\mathbb{C}^n, 0}$. L'algèbre quotient $A/(\mathcal{F} \cap A)$ est une algèbre de Lie de champs formels sur l'espace quotient $\widehat{\mathbb{C}^n, 0}/\mathcal{F} = \widehat{\mathbb{C}^q, 0}$.*

Exemple 4.3. *Soit γ une 2-forme fermée régulière sur $\widehat{\mathbb{C}^3, 0}$. On note $\mathfrak{inv}(\gamma)$ l'algèbre de Lie des champs préservant γ (i.e. X tel que $L_X\gamma = 0$) et $\mathcal{F}_\gamma$ le feuilletage donné par les champs X tels que $\iota_X\gamma = 0$. On a l'inclusion $\mathcal{F}_\gamma \subset \mathfrak{inv}(\gamma)$ et l'algèbre quotient $\mathfrak{inv}(\gamma)/\mathcal{F}_\gamma$ est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur $\widehat{\mathbb{C}^2, 0}$ préservant une 2-forme γ.*

Cette algèbre de Lie est simple, on en déduit que les idéaux de $\mathfrak{inv}(\gamma)$ sont inclus dans $\mathcal{F}_\gamma$

On obtient facilement les lemmes suivant.

Lemmes 4.4. 1°) *Si $B \subset A$ sont deux algèbres de Lie de champs formels, le type de B est inférieur ou égal au type de A.*

2°) *Si $\pi : \widehat{\mathbb{C}^n, 0} \to \widehat{\mathbb{C}^p, 0}$ est une surjection induisant un morphisme surjectif d'algèbres de Lie entre $A \subset \chi^n$ et $B \subset \chi^p$ alors le type de B est inférieur ou égal au type de A.*

Exemple 4.5. *Soit $\mathfrak{inv}(\Theta)$ l'algèbre des champs formelles préservant une matrice de formes Θ vérifiant $d\Theta = \Theta \wedge \Theta$. Notons $\mathcal{F}$ le feuilletage définie par Θ que nous supposerons régulier et de codimension q. En passant au quotient par $\mathcal{F}$, on obtient l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur $\widehat{\mathbb{C}^q, 0}$ préservant au moins un co-parallélisme donné par certains coefficients de Θ. Ce type d'algèbre est de type fini* [7].

Exemple 4.6. *Soit h et k des coordonnées sur $\widehat{\mathbb{C}^2, 0}$. L'algèbre $\mathfrak{inv}(dh \wedge dk)$ des champs formelles préservant cette forme est l'ensemble des champs formels de divergence nulle, son type est quadratique.*

5. Irréductibilité de la première équation de Painlevé

La première équation de Painlevé est modélisé par le champ de vecteurs sur $\mathbb{A}^3(\mathbb{C})$:

$$\delta_P = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + (6y^2 + x)\frac{\partial}{\partial z}.$$

Théorème 5.1. *La première équation de Painlevé est irréductible au sens de Nishioka-Umemura.*

Soit

$$(Y_m, \delta_m) \overset{\pi^m_{m-1}}{\dashrightarrow} (Y_{m-1}, \delta_{m-1}) \overset{\pi^{m-1}_{m-2}}{\dashrightarrow} \ldots \overset{\pi^2_1}{\dashrightarrow} (Y_1, \delta_1) \overset{\pi^1_0}{\dashrightarrow} (\mathbb{A}_1, \frac{\partial}{\partial x})$$

une extension réductrice de la droite affine.

Lemme 5.2 (Painlevé [14])**.** *Une application différentielle à valeurs dans $(\mathbb{C}^3, \delta_P)$ est dominante.*

Ce lemme est classique. Il affirme qu'aucune solution de la première équation de Painlevé n'est algébrique [14, 17] et qu'il n'existe pas d'hypersurface de $\mathbb{A}^3$ invariante sous δ_P [14, 3] ainsi que [11, 17] pour un résultat plus général.

Lemme 5.3. *Soit $\varphi : Z \dashrightarrow Y$ une application dominante. Elle induit un morphisme de groupoïde*

$$\varphi_\star : Aut(\varphi) \dashrightarrow J^*(Y).$$

Si G un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Z contenu dans $Aut(\varphi)$, la clôture de son image par $\varphi_\star$ un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Y noté $\varphi_\star G$.
Si G est $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Y, sa préimage par $\varphi_\star$ est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Z noté $\varphi_\star^{-1}G$ et vérifie $\varphi_\star\varphi_\star^{-1}G = G$.

Preuve. – Commençons par restreindre φ sur l'ouvert où elle est bien définie et régulière ; ouvert que nous noterons encore Z. Soient p et $\overline{p}$ deux points de Z. Par régularité de φ en p (resp. $\overline{p}$), il existe des coordonnées locales (t, y) au voisinage de p (resp. $(\overline{t}, \overline{y})$ au voisinage de $\overline{p}$) telles que les y (resp. $\overline{y}$) soient des tirées en arrière de coordonnées sur $\widehat{Y, \varphi(p)}$ (resp. $\widehat{Y, \varphi(\overline{p})}$. Par définition de $Aut(\varphi)$, une solution formelle de ce $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie du voisinage de p sur le voisinage de $\overline{p}$ un induit une transformation formelle de $\widehat{Y, \varphi(p)}$ sur $\widehat{Y, \varphi(\overline{p})}$.

L'application $\varphi_\star$ est bien définie montrons quelle est algébrique. Soient V et $\overline{V}$ (resp. U et $\overline{U}$) deux ouverts affines de Z (resp. Y), revêtement non ramifié d'ouverts de $\mathbb{A}^m$ (resp. $\mathbb{A}^n$) telles que $\varphi(V) \subset U$ et $\varphi(\overline{V}) \subset \overline{U}$. Nous noterons y_i (resp. $\overline{y}_i$) les coordonnées induites sur U (resp. $\overline{U}$) et t_j (resp. $\overline{t}_j$) des coordonnées complétant les y_i (resp $\overline{y}_i$) en des coordonnées sur V (resp. $\overline{V}$). Supposons de plus que les revêtements conjuguent φ à la projection sur les n premières coordonnées dans chacun des deux cas.

Considérons l'anneaux des fonctions régulières de $J^*(Y)$ au-dessus de $U \times \overline{U}$:

$$\mathcal{O}_{J^*(Y)}(U \times \overline{U}) = \mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{U}) \left[\ \overline{y}_i^\alpha\ |1 \leq i \leq n; \alpha \in \mathbb{N}^n; 0 < |\alpha|\right]$$

et l'anneaux des fonctions régulières de $Aut(\varphi)$ au-dessus de $V \times \overline{V}$:

$$\mathcal{O}_{Aut(\varphi)}(V \times \overline{V}) = \mathcal{O}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{V}) \left[\ \overline{y}_i^\alpha, \overline{t}_j^\beta\ |1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m-n; \alpha \in \mathbb{N}^n; \alpha \in \mathbb{N}^m; 0 < |\alpha|, |\beta|\right].$$

Définissons l'application $\varphi^\#$ de $\mathcal{O}_{J^*(Y)}(U \times \overline{U})$ dans $\mathcal{O}_{Aut(\varphi)}(V \times \overline{V})$ en étendant l'inclusion de $\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{U})$ dans $\mathcal{O}(V) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(\overline{V})$ par l'identification des variables portant le même nom. Cette application est différentielle (*i.e.* commute aux connexions) et induit l'application $\varphi_\star$ sur les difféomorphismes formels. □

Lemme 5.4. *Si $\varphi : (Z, \delta_Z) \dashrightarrow (Y, \delta_Y)$ est une application différentielle dominante alors*

$$Gal(\mathcal{F}_Y) \subset \varphi_\star\left(Gal(\mathcal{F}_Z) \cap Aut(\varphi)\right) \subset Aut(\mathcal{F}_Y).$$

Preuve. – Le groupoïde $\varphi_\star(Gal(\mathcal{F}_Z) \cap Aut(\varphi))$ est un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie sur Y. Pour montrer qu'il contient $Gal(\mathcal{F}_Y)$, il suffit de vérifier que tous les champs formels colinéaires à δ_Y sont solutions des équations linéarisée de $\varphi_\star(Gal(\mathcal{F}_Z) \cap Aut(\varphi))$ (*i. e.* de son algèbre de Lie). Soient p un point régulier de φ et $\widehat{f}$ un fonction formelle sur $\widehat{Y, \varphi(p)}$, le champ $\widehat{f}\delta_Y$ se relève sur le champ $\widehat{f}\delta_Z$ sur $\widehat{Z, p}$. Ce champs étant φ-projetable et tangent à $\mathcal{F}_Z$, il est solution de l'algèbre de Lie de $Gal(\mathcal{F}_Z) \cap Aut(\varphi)$ donc son projeté $\widehat{f}\delta_Y$ est solution de l'algèbre de Lie de $\varphi_\star(Gal(\mathcal{F}_Z) \cap Aut(\varphi))$. On en déduit la première inclusion. La deuxième inclusion s'obtient en projetant $Gal(\mathcal{F}_Z) \subset Aut(\mathcal{F}_Z)$. □

Remarque 5.5. *Dans le contexte du groupe de Galois infinitésimal* [19]*, H. Umemura montre que la pemière inclusion est une égalité.*

Preuve du théorème d'irréductibilité 5.1. – Supposons qu'il existe une extension réductrice Y_m de la droite affine et une application différentielle $\varphi : (Y_m, \delta_m) \dashrightarrow (\mathbb{A}^3, \delta_P)$. Nous noterons $\mathcal{F}_1 \supset \ldots \supset \mathcal{F}_m$ les feuilletages induits sur Y_m par la suite d'extensions différentielles. Soit p un point générique de Y_m. Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage sur Y_m, nous noterons $\mathfrak{gal}(\mathcal{F})$ l'algèbre de Lie des champs formels en p solutions de la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de $Gal(\mathcal{F})$, $\mathcal{F}$ l'algèbre des champs formels en p tangents au feuilletage et $\mathfrak{gal}(\mathcal{F})_\varphi$ l'algèbre $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}) \cap \mathfrak{aut}(\varphi)$.

Les lemmes précédents assurent que la projection $\widehat{\varphi} : \widehat{Y_m, p} \to \widehat{\mathbb{C}^3, \varphi(p)}$ est surjective et induit un morphisme d'algèbre de Lie $\widehat{\varphi}_\star : \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi \to \mathfrak{aut}(\mathcal{F}_P)$ dont l'image $\mathfrak{im}$ contient $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$. Dans des coordonnées adaptées, l'algèbre $\mathfrak{aut}(\mathcal{F}_P)$ est constituée des champs

$$a(t,z,w)\frac{\partial}{\partial t} + b(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + c(z,w)\frac{\partial}{\partial w}$$

et $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$ de ceux satisfaisant en plus

$$\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t} = 0.$$

Suivant [8, 1, 2], il n'y a qu'une algèbre de Lie comprise entre $\mathfrak{aut}(\mathcal{F}_P)$ et $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$: $\mathfrak{g}$ dont les champs vérifient :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial c}{\partial t}\right) = 0.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{m-1} = \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi \cap \mathcal{F}_1$ est un idéal de $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi$. Son image est donc un idéal de $\mathfrak{im}$. Le passage au quotient donne un morphisme surjectif

$$\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi/\mathfrak{h}_{m-1} \to \mathfrak{im}/\widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1}).$$

Le type de $\mathfrak{im}/\widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1})$ doit être inférieur à celui de $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_m)_\varphi/\mathfrak{h}_{m-1}$, il est donc au plus linéaire. Les idéaux propres des algèbres $\mathfrak{aut}(\mathcal{F}_P)$ et $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$ sont inclus dans $\mathcal{F}_P$. Dans ces deux cas le type des quotients est au moins quadratique, on en déduit que

– soit $\mathfrak{im} = \widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1})$,
– soit $\mathfrak{im} = \mathfrak{g}$ et $\widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1}) = \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$.

Considérons maintenant Z_{m-1} la feuille formelle de $\mathcal{F}_1$ passant par p. On a une application que nous appellerons encore $\widehat{\varphi} : Z_{m-1} \to \widehat{\mathbb{C}^3, \varphi(p)}$ surjective d'après les résultats précédents. Elle induit un morphisme surjectif $\widehat{\varphi}_\star : \mathfrak{h}_{m-1} \to \mathfrak{im}_2 := \widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-1})$ d'algèbre de Lie. Notons $\mathfrak{h}_{m-2}$ l'idéal $\mathfrak{h}_{m-1} \cap \mathcal{F}_2$ de $\mathfrak{h}_{m-1}$. Le raisonnement précédent implique que

– soit $\mathfrak{im}_2 = \widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-2})$,
– soit $\mathfrak{im}_2 = \mathfrak{g}$ et $\widehat{\varphi}_\star(\mathfrak{h}_{m-2}) = \mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$.

Par induction on en déduit que $\mathcal{F}_P = \widehat{\varphi}_\star(\mathcal{F}_m)$ devrait être égale à $\mathfrak{gal}(\mathcal{F}_P)$, $\mathfrak{g}$ ou χ^3 ce qui n'est pas vrai. La première équation de Painlevé est donc irréductible au sens de Nishioka-Umemura. □

Références

[1] Cartan, É. - *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Sci. École Normale Sup. **22** (1905) 219–308

[2] Cartan, É. - *Les sous-groupes des groupes continus de transformations*, Ann. Sci. École Normale Sup. **25** (1908) 57–194

[3] Casale, G. - *Le groupoïde de Galois de P_1 et son irréductibilité*, à paraître (2007)

[4] Drach, J. - *Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes*, Ann. Sci. Écoles Normale Sup. **15** (1898) 243–384

[5] Drach, J. - *Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé*, Bull. Sci. Math. **39** (1915) 149–166

[6] Godbillon, C. - *Feuilletages. Études géométriques.* Progress in Mathematics, **98** Birkhäuser Verlag, Basel (1991) xiv+474 pp.

[7] Kobayashi, S. - *Transformation groups in differential geometry*, Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1995. viii+182

[8] Lie, S. - *Theorie der transformationsgruppen I*, Math. Ann. **16** (1880) - *Transformations Groups*, translated by M. Ackerman, commented by R. Hermann, Lie groups : History, Frontiers and Applications Vol **1** Math. Sci. Press (1975)

[9] Mackenzie, K. - *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry* London Mathematical Society L.N.S. **124** Cambridge University Press, Cambridge (1987) xvi+327

[10] Malgrange, B. - *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage*, Monographie **38** vol **2** de L'enseignement mathématique (2001)

[11] Nishioka, K. - *A note on the transcendency of Painlevé's first transcendent*, Nagoya Math. J. **109** (1988) 63–67

[12] Painlevé, P. - *Leçons de Stokholm* (1875), Oeuvres complètes Tome **1**, éditions du CNRS (1972)

[13] Painlevé, P. - *Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme*, Bull. Soc. Math. **28** (1900) 201—261

[14] Painlevé, P. - *Démonstration de l'irréductibilité absolue de l'équation $y_{xx} = 6y^2 + x$*, C.R. Acad. Sci. Paris **135** (1902) 641–647

[15] Ritt, J.F. - *Differential Algebra*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. **XXXIII**, American Mathematical Society, New York (1950)

[16] Saito, M.-H. et Terajima, H. - *Nodal curves and Riccati solutions of Painlevé equations*, J. Math. Kyoto Univ. **44**, No.3 (2004) 529–568

[17] Umemura, H. - *On the irreducibility of the first differential equation of Painlevé*, Alg. Geom. and Com. Alg. in honor of M. Nagata (1987) 771–789

[18] Umemura, H. - *Second proof of the irreducibility of the first differential equation of Painlevé*, Nagoya Math. J. **117** (1990), 125–171

[19] Umemura, H. - *Galois theory of algebraic and differential equation*, Nagoya Math. J. vol **144** (1996) 1–58 - *Differential Galois theory of infinite dimension*, Nagoya Math. J. vol **144** (1996) 59–135

[20] Vessiot, E. - *Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations*, Ann. Sci. École Normale Sup. **21** (1904) 9–85

[21] Vessiot, E. - *Sur la réductibilité et l'intégration des systèmes complets*, Ann. Sci. École Normale Sup. **29** (1912) 209–278