$\mathcal{D}$-ENVELOPPE D'UN DIFFÉOMORPHISME DE $(\mathbb{C},0)$.

GUY CASALE

1. Introduction

B. Malgrange a introduit dans son article *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage* ([Malg3]) la notion de $\mathcal{D}$-groupoïde (ou groupoïde de Lie). On peut voir un $\mathcal{D}$-groupoïde sur un disque Δ comme un système d'équations différentielles dont les germes de solutions forment un sous-groupoïde "ensembliste" du groupoïde $Aut(\Delta)$ des germes d'applications inversibles de Δ dans lui-même. Cette notion permet de définir la $\mathcal{D}$-enveloppe de divers systèmes dynamiques admettant des singularités (feuilletages, champs de vecteurs, difféomorphismes). Dans le cas des feuilletages provenant d'une équation différentielle linéaire, B. Malgrange prouve que la $\mathcal{D}$-enveloppe redonne le groupe de Galois de l'équation.

Dans la première partie de cet exposé, nous nous proposons de déterminer la liste des $\mathcal{D}$-groupoïdes au dessus de $(\mathbb{C},0)$. Nous montrons (théorème 3.4) que ces groupoïdes sont donnés par des équations d'ordre inférieur ou égal à trois. Plus précisément dans une carte $(x,y,y_i)_{i\geq 1}$ de l'espace des jets d'applications de Δ dans lui-même, nous obtenons :

- le groupoïde de rang infini défini par l'idéal nul ;
- les groupoïdes de rang trois donnés par l'équation différentielle
$$\nu(y)y_1^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0$$
avec ν méromorphe ;
- ceux de rang deux donnés par l'équation différentielle
$$\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$$
avec μ méromorphe ;
- ceux de rang un d'équation
$$\gamma_k(y)y_1^n - \gamma_k(x) = 0$$
avec γ méromorphe et n entier ;
- ceux de rang nul, donnés par
$$h(x) - h(y) = 0$$
avec h holomorphe.

On peut interpréter ces groupoïdes comme des groupoïdes d'isométries de structures géométriques méromorphes (voir remarque 3.6).

Dans la deuxième partie, nous déterminons la $\mathcal{D}$-enveloppe d'un germe de difféomorphisme. Par définition, celle-ci est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde admettant le germe de difféomorphisme comme solution. Lorsqu'un germe est formellement linéarisable, la seule condition pour que sa $\mathcal{D}$-enveloppe soit de rang fini est qu'il soit analytiquement linéarisable. Parmi les germes résonnants, seuls ceux dont l'espace des orbites est un recollement de sphères par des homographies ramifiées (au même ordre) admettent une $\mathcal{D}$-enveloppe de rang fini. Dans la terminologie de J. Écalle, ces difféomorphismes sont appellés binaires. Ceux dont un recollement de sphères sur deux est l'identité sont appellés unitaires [E].

F. Loray a remarqué que les équations des $\mathcal{D}$-enveloppes étaient de la même forme que les équations satisfaites par le représentant canonique d'une classe analytique de germes de difféomorphismes binaires trouvées par J. Écalle dans *Les fonctions résurgentes* ([E]). Le représentant canonique de J. Écalle admet une $\mathcal{D}$-enveloppe rationnelle. Nous nous proposons dans la dernière partie de cet exposé de reprendre les calculs de J. Écalle pour déterminer explicitement les $\mathcal{D}$-enveloppes des représentants canoniques des classes des difféomorphismes unitaires de résidu nul, en fonction des invariants formels et des coefficients de résurgences caractérisant cette classe de conjugaison analytique. Le fait de connaître *a priori* la forme des équations nous conduit à des calculs “systématiques”.

Cette liste des germes de $\mathcal{D}$-groupoïdes obtenue peut être utilisée pour d'autres applications que nous ne développerons pas ici :
- détermination des applications rationnelles de $\mathbb{CP}^1$ dans lui-même qui admettant une $\mathcal{D}$-enveloppe de rang fini.
- détermination du “type” de transcendance (voir [C]) d'intégrales premières de feuilletage de codimension un en fonction de la $\mathcal{D}$-enveloppe de son groupoïde d'holonomie.
- classification analytique des germes de groupoïdes. Celle-ci repose sur le fait que la plupart des $\mathcal{D}$-groupoïdes admettent un germe de difféomorphisme en 0 comme solution.

Remerciements à E. Paul pour avoir supervisé ce travail, à B. Malgrange pour les communications et les notes manuscrites ([Malg2]) à l'origine de cet exposé, à J.P. Ramis, F. Fauvet et D. Sauzin.

2. Définitions

Dans cette partie nous rappellons les définitions données par B. Malgrange ([Malg3]) dans le cadre qui nous intéresse, c'est-à-dire au dessus d'un représentant Δ d'un germe de disque.

Nous noterons $J_k^*(\Delta)$ l'espace des jets d'ordre k d'applications inversibles de Δ sur Δ. Cet espace s'identifie, en choisissant une coordonnée x sur Δ, à $\Delta \times \Delta \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^{k-1}$ avec les coordonnées $(x, y, y_1, \ldots, y_k)$. Il est naturellement muni :
- de deux projections, la projection sur le premier facteur appelée la source $s : J_k^*(\Delta) \to \Delta$, et celle sur le deuxième appelée le but $t : J_k^*(\Delta) \to \Delta$,
- d'une composition $c : (J_k^*(\Delta), t) \times_\Delta (J_k^*(\Delta), s) \to J_k^*(\Delta)$ définie sur les couples de jets (h, g) tels que $t(h) = s(g)$,
- d'une identité, $e : \Delta \to J_k^*(\Delta)$ qui à x associe le jet $(x, x, 1, 0 \ldots, 0)$,
- d'une inversion $i : J_k^*(\Delta) \to J_k^*(\Delta)$ qui à un jet fait correspondre le jet inverse.

Ces flèches vérifient certains diagrammes commutatifs et font de $J_k^*(\Delta)$ un groupoïde sur Δ ([Mck]).
L'anneau $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)} = \mathcal{O}_{\Delta\times\Delta}[y_1, y_1^{-1}, y_2, \ldots, y_k]$ donne à $J_k^*(\Delta)$ une structure d'espace analytique compatible avec sa structure de groupoïde. Cette compatibilité se traduit en termes de diagrammes commutatifs sur les flèches s^*, t^*, c^*, e^* et i^* induites sur les anneaux correspondants. Ces diagrammes sont les diagrammes duaux de ceux décrivant la structure de groupoïde de $J_k^*(\Delta)$.

Définition 2.1. *Un sous-groupoïde de $J_k^*(\Delta)$ est donné par un idéal $\mathcal{I}_k$ de $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$ tel que*

(1) $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{id} = \ker e^*$,
(2) $i^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k$,
(3) $c^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} 1 + 1 \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{I}_k$.

L'image de $\mathcal{I}_k$ par c^* engendre un idéal dans l'anneau $\mathcal{O}_{(J_k^*(\Delta),t)\times_\Delta(J_k^*(\Delta),s)}$. Par définition, cet anneau est $(\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}, t^*) \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} (\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}, s^*)$ où la structure de $\mathcal{O}_\Delta$-algèbre est donnée pour le premier facteur par t^* et pour le deuxième facteur par s^*. On entend alors par $\mathcal{I}_k \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} 1$ l'idéal engendré par la première injection de $\mathcal{I}_k$ et par $1 \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} \mathcal{I}_k$ celui engendré par la deuxième injection. La somme de ces deux idéaux est le plus petit idéal les contenant tous les deux.

Les anneaux $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$ sont munis d'une $\mathbb{C}$-dérivation à valeurs dans $\mathcal{O}_{J_{k+1}^*(\Delta)}$ définie en coordonnées, pour E dans $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$, par :

$$DE(x, y, \ldots, y_{k+1}) = \frac{\partial E}{\partial x}(x, \ldots, y_k) + \frac{\partial E}{\partial y}(x, \ldots, y_k)y_1 + \ldots + \frac{\partial E}{\partial y_k}(x, \ldots, y_k)y_{k+1}$$

Définition 2.2. *Un $\mathcal{D}$-groupoïde sur Δ est la donnée d'un idéal réduit $\mathcal{I}$ de $\varinjlim \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)} = \mathcal{O}_{J^*(\Delta)}$ tel que*

(1) *$\mathcal{I}$ soit stable par dérivation,*
(2) *il existe un sous-ensemble analytique fermé de codimension un, $Z \subset \Delta$, et un entier k tels que pour tout $l \geq k$, $\mathcal{I}_l \subset \mathcal{I}_{id}$, $i^*\mathcal{I}_l \subset \mathcal{I}_l$ et $\mathcal{I}_l$ définisse un sous-groupoïde de $J_l^*(\Delta - Z)$.*

Quitte à réduire Δ, l'ensemble Z peut être supposé réduit à $\{0\}$.
Une solution de $\mathcal{I}$ en $p \in \Delta$ est un morphisme u de $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}/\mathcal{I}$ dans $\mathcal{O}_{\Delta,p}$ au dessus de la restriction $s^*\mathcal{O}_\Delta \to \mathcal{O}_{\Delta,p}$, tel que $u(DE) = \frac{\partial}{\partial x}u(E)$. En regardant $f = u(y)$, on obtient un germe $f : (\Delta, p) \to (\Delta, q)$ satisfaisant les équations différentielles de l'idéal $\mathcal{I}$. On définit de même les solutions formelles comme morphismes dans $\widehat{\mathcal{O}}_{\Delta,p}$. Réciproquement, un germe d'application inversible f, solution des équations différentielles engendrant $\mathcal{I}$ définit un morphisme u par $u(y) = f$.

Définition 2.3. *Etant donné un difféomorphisme $f : (\Delta, 0) \to (\Delta, 0)$, sa $\mathcal{D}$-enveloppe est le plus petit $\mathcal{D}$-groupoïde qui admette f comme solution.*

L'existence de cet objet a été établie en toute généralité dans [Malg3] en utilisant les théorèmes 2.6 et 2.7 rappelés à la fin de cette partie.
La compréhension des $\mathcal{D}$-groupoïde passe par l'étude de leurs $\mathcal{D}$-algèbre de Lie. Nous noterons $J_k^*(\Delta \to T\Delta)$ l'espace des jets d'ordre k de sections du fibré tangent. Le choix d'une coordonnée x sur Δ donne une coordonnées naturelles a sur les fibres de $T\Delta$ ainsi que des coordonnées a_i pour $i \leq k$ sur les fibres de $J_k^*(\Delta \to T\Delta)$.

On munit cet espace de l'anneau $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta\to T\Delta)} = \mathcal{O}_\Delta[a, a_1, \ldots, a_k]$. Ces anneau sont eux aussi munis d'une dérivation définie pour $E \in \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta\to T\Delta)}$ par :

$$DE(x, a, \ldots, a_{k+1}) = \frac{\partial E}{\partial x}(x, \ldots, a_k) + \ldots + \frac{\partial E}{\partial a_k}(x, \ldots, a_k)a_{k+1}.$$

Définition 2.4. *Une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie sur Δ est la donnée d'un idéal linéaire et différentiel $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_{J^*(\Delta\to T\Delta)} = \varinjlim \mathcal{O}_{J_k^*(\Delta\to T\Delta)}$ dont les champs solutions forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de germes de champs de vecteurs stable par le crochet de Lie.*

En choisissant une coordonnée x sur Δ, on obtient une coordonnée naturelle a sur les fibres de $T\Delta$. On entend alors par solution de $\mathcal{L}$ en p un morphisme u de $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta\to T\Delta)}/\mathcal{L}$ dans $\mathcal{O}_{\Delta,p}$ au dessus de la restriction $s^*\mathcal{O}_\Delta \to \mathcal{O}_{\Delta,p}$. Le champ de vecteurs $f(x)\frac{d}{dx}$ où $f = u(a)$ est un champ solution de $\mathcal{L}$ en p. L'idéal étant engendré par des équations différentielles linéaires, les champs solutions forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Le candidat à remplacer l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie dans le cadre des groupoïde est le linéarisé le long de l'identité. Dans les coordonnées $(x, a_0, \ldots, a_k)$ sur $J_k^*(\Delta \to T\Delta)$ données par une coordonnée x sur Δ, le linéarisé est défini par l'idéal différentiel et linéaire de $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta\to T\Delta)}$: $L(\mathcal{I}) = \{L(E), E \in \mathcal{I}\}$ où

$$L(E) = \frac{\partial E}{\partial y}(x, x, 1, 0, \ldots, 0)a_0 + \ldots + \frac{\partial E}{\partial y_k}(x, x, 1, 0, \ldots, 0)a_k$$

Proposition 2.5 ([Malg3]). *Le linéarisé d'un $\mathcal{D}$-groupoïde le long de l'identité est une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie.*

Les deux théorèmes suivant seront essentiels.

Théorème 2.6 ([Malg3]). *Soient $\mathcal{I}_k$ un idéal de $\mathcal{O}_{J_k^*(\Delta)}$ et $Z \subset \Delta$ un sous-ensemble analytique fermé de codimension un tels que $\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_{id}$, $i^*\mathcal{I}_k \subset \mathcal{I}_k$ et $\mathcal{I}_k$ définisse un sous-groupoïde de $J_k^*(\Delta - Z)$. La racine de l'idéal différentiellement engendré par $\mathcal{I}_k$ dans $\mathcal{O}_{J^*(\Delta)}$ définit un $\mathcal{D}$-groupoïde.*

Théorème 2.7 ([Malg3]). *Soient Y^α une famille de $\mathcal{D}$-groupoïdes d'idéaux $\mathcal{I}^\alpha$. Leur intersection donnée par la racine de la somme de ces idéaux est un $\mathcal{D}$-groupoïde.*

3. Liste des $\mathcal{D}$-algèbre de Lie et des $\mathcal{D}$-groupoïdes sur $(\mathbb{C}, 0)$

L'anneau $\mathbb{C}\{x\}[\frac{d}{dx}]$ étant principal, l'idéal décrivant une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie est engendré par une seule équation. En divisant par le coefficient dominant de cette équation, on se ramène à étudier les solutions d'une équation normalisée méromorphe. Le choix d'une coordonnée x sur Δ donne des coordonnées $(x, a_0, \ldots, a_k)$ sur $J_k^*(\Delta \to T\Delta)$.

Proposition 3.1 ([Malg2]). *Il n'y a que cinq types d'algèbres de Lie sur Δ, correspondant aux équations suivantes :*

rang 0 : $a_0 = 0$	*notée*	$\mathcal{A}_0$
rang 1 : $a_1 + \mu a_0 = 0$	"	$\mathcal{A}_1(\mu)$
rang 2 : $a_2 + \mu a_1 + \mu' a_0 = 0$	"	$\mathcal{A}_2(\mu)$
rang 3 : $a_3 + \nu a_1 + \frac{\nu'}{2} a_0 = 0$	"	$\mathcal{A}_3(\nu)$
rang ∞ : *pas d'équation*	"	$\mathcal{A}_\infty$

μ et ν étant méromorphes sur Δ.

Preuve. – Un théorème de Lie [Lie] dit qu'une algèbre de Lie de champs de vecteurs holomorphes sur un disque est de rang inférieur ou égal à trois ou infini. L'équation engendrant l'idéal décrivant une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie est d'ordre inférieur ou égal à trois car en ses points réguliers le rang des solutions doit être au plus trois. Examinons chacun des cas.
- Rang 1 : Toute équation $a' + \mu a = 0$ avec μ méromorphe n'ayant qu'une droite de solutions, elle définit une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de rang 1.
- Rang 2 : Soit $L(a) = a'' + \mu a' + \nu a = 0$ une équation d'ordre 2. Prenons a et b deux solutions de L. De l'égalité :

$$L(a'b - b'a) = (\nu - \mu')(a'b - b'a)$$

nous déduisons qu'une équation d'ordre 2 définit une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie si et seulement si elle est de la forme $a'' + \mu a' + \mu' a = 0$.
- Rang 3 : Soit $L(a) : a''' + \mu a'' + \nu a' + \lambda a = 0$ une équation d'ordre trois. Prenons trois solutions a, b, c de L linéairement indépendantes. L'égalité :

$$L(a'b - b'a) = (2\lambda - \nu')(ab' - a'b) - \mu'(ab'' - a''b) + \mu(a'b'' - a''b')$$

valable pour les couples (a, b), (a, c) et (b, c) donne trois expressions nulles si et seulement si :

$$(2\lambda - \nu')C_1 - \mu' C_2 + \mu C_3 = 0$$

où les C_i sont les colonnes (au déterminant près) de la matrice

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{bmatrix}^{-1}$$

Le déterminant de cette matrice ne s'annulant pas, il faut et il suffit que $\nu' = 2\lambda$ et $\mu = 0$ pour que notre équation décrive une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie. □

Remarque 3.2. *L'équation d'une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de rang deux s'écrit $(a' + \mu a)' = 0$ et celle d'une $\mathcal{D}$-algèbre de Lie de rang trois, $(a' + \mu a)'' - \mu(a' + \mu a)' = 0$ avec $\nu = 2\mu' - \mu^2$.*

Proposition 3.3. *Si $x = \varphi(\overline{x})$ est un changement de coordonnées, les équations de la proposition 3.1 dans les nouvelles coordonnées $(\overline{x}, \overline{a_0}, \overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3})$ sur $J_3(\Delta \to T\Delta)$ sont :*

$$\begin{aligned} &\textit{rang 0} : \overline{a_0} = 0 \\ &\textit{rang 1} : \overline{a_1} + \overline{\mu}\ \overline{a_0} = 0 \\ &\textit{rang 2} : \overline{a_2} + \overline{\mu}\ \overline{a_1} + \overline{\mu}'\overline{a_0} = 0 \\ &\textit{rang 3} : \overline{a_3} + \overline{\nu}\ \overline{a_1} + \tfrac{\overline{\nu}'}{2}\overline{a_0} = 0 \end{aligned}$$

avec $\overline{\mu} = \mu \circ \varphi \varphi' + \frac{\varphi''}{\varphi'}$ et $\overline{\nu} = \nu \circ \varphi (\varphi')^2 + 2\frac{\varphi'''}{\varphi'} - 3\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$.

Les calculs du changement de coordonnées sur $J_3(\Delta \to T\Delta)$ et de leur action sur les équations sont laissés au lecteur.

Nous allons chercher à intégrer ces algèbres, c'est-à-dire trouver des $\mathcal{D}$-groupoïdes ayant pour $\mathcal{D}$-algèbres de Lie celles données précédemment.

Théorème 3.4.

(1) *L'équation $\nu(y)y_1^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \nu(x) = 0$ définit l'unique $\mathcal{D}$-groupoïde ayant pour $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\mathcal{A}_3(\nu)$ et sera noté $\mathcal{G}_3(\nu)$*

(2) *L'équation* $\mu(y)y_1 + \frac{y_2}{y_1} - \mu(x) = 0$ *définit l'unique* $\mathcal{D}$*-groupoïde ayant pour* $\mathcal{D}$*-algèbre de Lie* $\mathcal{A}_2(\mu)$ *et sera noté* $\mathcal{G}_2(\mu)$

(3) *La* $\mathcal{D}$*-algèbre de Lie* $\mathcal{A}_1(\mu)$ *n'est intégrable que lorsque* μ *a un pôle simple de résidu rationnel* $\frac{p}{q}$*. Dans ce cas les groupoïdes intégrant cette* $\mathcal{D}$*-algèbre de Lie sont définis par :*

$$\gamma_k(y)y_1^{kq} - \gamma_k(x) = 0 \ \textit{avec}\ \gamma_k(x) = \exp(kq\int \mu)(x)$$

pour tout entier k*. Ils seront notés* $\mathcal{G}_1^k(\mu)$*.*

(4) *Quitte à diminuer* Δ*, les* $\mathcal{D}$*-groupoïdes ayant une* $\mathcal{D}$*-algèbre de Lie de rang nul sont définis par une équation* $h(x) - h(y) = 0$ *avec* h *holomorphe sur* Δ*.*

Pour alléger les formules nous noterons $S(\varphi)$ pour $2\frac{\varphi'''}{\varphi'} - 3\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2$.
La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant (voir [Malg3]).

Lemme 3.5. *Soit* $\mathcal{I}$ *l'idéal définissant un* $\mathcal{D}$*-groupoïde. Si* $xF \in \mathcal{I}$ *alors* $F \in \mathcal{I}$*.*

Preuve. – La dérivée de xF, $D_x(xF)$ est égale à

$$F + x\frac{\partial F}{\partial x} + x\frac{\partial F}{\partial y}y_1 + \ldots + x\frac{\partial F}{\partial y_k}y_{k+1}.$$

En multipliant par F, on obtient que F^2, donc F, est dans l'idéal réduit différentiablement engendré xF. □

Preuve du théorème 3.4. – Les solutions $\varphi : (\Delta, a) \to (\Delta, b)$ d'un $\mathcal{D}$-groupoïde laissent stable la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie du groupoïde. D'après la proposition 3.3, l'équation traduisant l'invariance de $\mathcal{A}_3(\nu)$ par φ est l'équation (1). Cette équation d'ordre trois est celle d'un sous-groupoïde de $J_3^*(\Delta - \{0\})$. L'identité est solution, et de la formule :

$$\begin{aligned}&\nu\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)\left((\varphi_1\circ\varphi_2)'\right)^2 + S(\varphi_1\circ\varphi_2)) - \nu\\ &= (\nu\circ\varphi_1\,(\varphi_1')^2 + S(\varphi_1) - \nu)\circ\varphi_2\,(\varphi_2')^2 + (\nu\circ\varphi_2\,(\varphi_2')^2 + S(\varphi_2) - \nu)\end{aligned}$$

on déduit la stabilité par inversion et par la composition en dehors du point 0. Le théorème 2.6 de B. Malgrange, rappelé dans la section précédente, permet de conclure que l'idéal réduit différentiablement engendré par l'équation (1) décrit un $\mathcal{D}$-groupoïde. Ce $\mathcal{D}$-groupoïde intègre $\mathcal{A}_3(\nu)$ et contient tous les $\mathcal{D}$-groupoïdes intégrant cette algèbre. L'équation étant résolue par rapport à y_3 au dessus de $\Delta - \{0\}$, un k-jet solution de (1) se prolonge en un unique $(k+1)$-jet solution de (1). On en déduit que si il existe un autre $\mathcal{D}$-groupoïde intégrant $\mathcal{A}_3(\nu)$, les zéros de son idéal sont ceux de l'équation (1) au dessus de $\Delta - \{0\}$. Les équations supplémentaires de son idéal sont de la forme $F(x, y, y_1, \ldots, y_k)$ avec xF dans l'idéal engendré par (1). Le lemme précédent permet de conclure.

L'équation (2) vérifiée par les φ laissant invariante la $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\mathcal{A}_2(\mu)$ définit aussi un $\mathcal{D}$-groupoïde. On le vérifie grâce à l'égalité :

$$\begin{aligned}&\mu\circ(\varphi_1\circ\varphi_2)(\varphi_1\circ\varphi_2)' + \tfrac{(\varphi_1\circ\varphi_2)''}{(\varphi_1\circ\varphi_2)'} - \mu\\ &= (\mu\circ\varphi_1\varphi_1' + \tfrac{\varphi_1''}{\varphi_1'} - \mu)\circ\varphi_2\varphi_2' + (\mu\circ\varphi_2\varphi_2' + \tfrac{\varphi_2''}{\varphi_2'} - \mu).\end{aligned}$$

Comme l'équation est résolue par rapport à y_2 au dessus de $\Delta - \{0\}$, on conclut qu'il n'y a pas d'autres $\mathcal{D}$-groupoïdes intégrant $\mathcal{A}_2(\mu)$.

On prouve le (3) en remarquant que quelque soit μ et quelque soient x et y dans $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$, l'équation, définies sur $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times \mathbb{C}^*$

$$E(x,y,y_1) = \left(\exp(\int \mu)\right)(y)y_1 - \left(\exp(\int \mu)\right)(x) = 0$$

donne un $\mathcal{D}$-groupoïde sur $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$ qui intègre $\mathcal{A}_1(\mu)$. Si $\mathcal{A}_1(\mu)$ est intégrable sur Δ par un $\mathcal{D}$-groupoïde d'idéal $\mathcal{I}$, les équations de ce groupoïde s'annulent sur les zéros de E au voisinage de l'identité. Or les zéros de cette dernière équation sont lisses et connexes au dessus de $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$, les équation de $\mathcal{I}$ s'annulent donc sur les zéros de E. Grâce au lemme précédent, $\mathcal{I}$ est inclus dans l'idéal engendré par E au dessus de $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$.Quelque soit le 1-jet (x,y,y_1) solution de $y_1 = \frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}$, il est aussi solution des équations d'ordre 1 de $\mathcal{I}$. En remplaçant y_1 par $\frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}$ dans ces équations on obtient des équations holomorphes en x et y et polynomiale en $\frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}$. En fixant y tel que $\exp(\int \mu)(y)$ soit fini, $\exp(\int \mu)(x)$ est algébrique sur le corps des fonctions méromorphes sur Δ. On en déduit que μ doit avoir un pôle simple de résidu rationnel. Il nous reste à prouver que les équations (3) sont les seules à intégrer $\mathcal{A}_1(\mu)$. Soit $\mathcal{I}$ l'idéal d'un $\mathcal{D}$-groupoïde qui intègre cette $\mathcal{D}$-algèbre de Lie ; nous allons regarder les zéros de ses équations d'ordre un au dessus de $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$. Nous connaissons déjà un zéro au dessus de $(x,y) \in (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$, c'est celui de troisième coordonnée $y_1 = \frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}$. Les autres zéros au dessus du même point différent de celui-ci d'une composition à droite par un 3-jet solution des équations d'ordre trois du $\mathcal{D}$-groupoïde de la forme (x,x,θ). De telles solutions forment un sous-groupe algébrique fini de $\mathbb{C}^*$. Il existe donc un entier k tel que tous les zéros de $\mathcal{I}$ au dessus de (x,y) s'écrivent $(x,y,\theta\frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)})$ avec $\theta^k = 1$. Ce nombre k est indépendant du point (x,y) que l'on a choisi. Considérons l'équation

$$E_k : \left(\exp(\int \mu)\right)^k (y)y_1^k - \left(\exp(\int \mu)\right)^k (x).$$

Nous allons montrer que cette équation est en faite méromorphe sur $\Delta \times \Delta \times \mathbb{C}^*$. L'idéal réduit $\mathcal{I}_3$ des équations d'ordre inférieur ou égal à trois défini une hypersurface de $\Delta \times \Delta \times \mathbb{C}^*$ et est donc engendré par une équation : $H(x,y,y_1)$. Cette équation ayant les mêmes zéros que E_k sur $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times (\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0}) \times \mathbb{C}^*$, il existe une fonction holomorphe F définie sur cet ouvert telle que :

$$E_k(x,y,y_1) = F(x,y,y_1)H(x,y,y_1).$$

En identifiant les coefficients de cette identité entre ces deux polynômes en y_1, on trouve que $\left(\frac{\exp(\int \mu)(x)}{\exp(\int \mu)(y)}\right)^k$ est méromorphe en x et y. Ceci ne peut être le cas que lorsque $(\exp(\int \mu)(x))^k$ est méromorphe. L'équation E_k engendre donc l'idéal $\mathcal{I}_3$. Par le lemme 3.5 et le théorème 2.6 elle engendre différentiablement $\mathcal{I}$.

Nous allons maintenant prouver le (4). L'idéal des équations d'ordre 0 d'un tel groupoïde est engendré par une équation : $E \in \mathcal{O}_{\Delta \times \Delta}$. D'après le lemme 3.5 et le théorème 2.6, cette équation engendre différentiablement l'idéal du $\mathcal{D}$-groupoïde. Le lieu des zéros de E est une relation d'équivalence analytique sur $\Delta - \{0\}$: la preuve de la transitivité n'est pas triviale et nous ne la développerons pas dans cet exposé.

Le lemme précédent affirme que $E(0,y) \not\equiv 0$; on peut utiliser le théorème de préparation de Weierstrass et supposer, quitte à réduire Δ, que

$$E(x,y) = y^k + a_{k-1}(x)y^{k-1} + \ldots + a_0(x).$$

Pour x, y et z dans Δ^* la propriété de transitivité s'écrit

$$E(x,y) = \alpha(x,y,z)E(x,z) + \beta(x,y,z)E(y,z).$$

Si on fixe deux points x et y équivalents, on obtient l'égalité

$$E(x,z) = -\frac{\beta(x,y,z)}{\alpha(x,y,z)}E(y,z).$$

Les deux polynômes en z, $E(x,z)$ et $E(y,z)$, étant unitaires, cette égalité s'écrit $E(x,z) = E(y,z)$ d'où $a_0(x) = a_0(y)$. Les zéros de $E(x,y)$ sont inclus dans les zéros de $a_0(x) - a_0(y)$. Par symétrie, il existe une unité $u(x,y)$ telle que

$$E(x,0) = u(x,0)E(0,x)$$

donc $a_0(x) = u(x,0)x^k$ et l'équation $a_0(x) - a_0(y)$ n'est pas identiquement nulle. Les zéros de $E(x,y)$ sont donc égaux aux zéros de $a_0(x) - a_0(y)$. Les idéaux étant réduits, $a_0(x) - a_0(y)$ engendre les équations d'ordre 0 du groupoïde. $\square$

Remarque 3.6. *Si on choisit sur* $(\Delta - \mathbb{R}_{\leq 0})$ *une primitive Schwartzienne* V *de* ν $(S(V) = \nu)$*, les solutions* φ *de* $\mathcal{G}_3(\nu)$ *vérifient*

$$S(V \circ \varphi) = S(V).$$

(1) *L'application* V *semi-conjugue le groupoïde des solutions de* $\mathcal{G}_3(\nu)$ *au groupoïde des homographies au dessus de l'image de* V*.*

(2) *On peut interpréter* $\mathcal{G}_3(\nu)$ *comme le groupoïde d'invariance d'une dérivée Schwartzienne. Une dérivée Schwartzienne est une section méromorphe d'un fibré* D^3 *équivariant sur* Δ *(*D^3 *est le groupe de 3-jets de germes de difféomorphismes de* $(\mathbb{C},0)$*). Ce fibré se construit à partir du fibré des 3-repères* R^3 *de groupe structural* D^3 *et de* $\mathbb{C}$ *muni de l'action de* D^3 *suivante : soit* $g = (0,0,g_1,g_2,g_3) \in D^3$,

$$g \cdot z = z(g_1)^2 + 2\frac{g_3}{g_1} - 3\left(\frac{g_2}{g_1}\right)^2.$$

Soit ν *une section méromorphe de* $R^3 \times_{D^3} \mathbb{C}$*. Le groupoïde d'isométries de* ν *est défini par l'équation* $\varphi^*\nu = \nu$ *qui est exactement l'équation de* $\mathcal{G}_3(\nu)$*.*

4. Conditions nécessaires et suffisantes pour que la $\mathcal{D}$-enveloppe d'un difféomorphisme soit de rang fini.

Dans cette partie nous allons déterminer les germes de difféomorphismes $f : (\mathbb{C},0) \to (\mathbb{C},0)$ solutions de $\mathcal{D}$-groupoïde. Les champs de vecteurs holomorphes $a(x)\frac{d}{dx}$ sont solutions de $\mathcal{D}$-algèbres de Lie :

- $\mathcal{A}_1(\frac{a'}{a})$,
- $\mathcal{A}_2(\mu)$ avec μ solution méromorphe de $a'' + \mu a' + \mu' a = 0$,
- $\mathcal{A}_3(\nu)$ avec ν solution méromorphe de $a''' + \nu a' + \frac{\nu'}{2}a = 0$.

Ceci a pour conséquence qu'un germe de difféomorphisme de $(\mathbb{C},0)$ donné par le flot d'un champs de vecteurs holomorphes $a(x)\frac{d}{dx}$ est solutions des $\mathcal{D}$-goupoïdes suivant :

- $\mathcal{G}_1(-\frac{a'}{a})$
- $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec μ solution méromorphe de $a'' + \mu a' + \mu' a = 0$
- $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec ν solution méromorphe de $a''' + \nu a' + \frac{\nu'}{2} a = 0$.

Un germe de difféomorphisme f étant toujours formellement conjugué au flot d'un champ de vecteur ([MR2]), il satisfait des équations formelles de la forme :

$$\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma} \circ f (f')^k,\ \widehat{\mu} = \widehat{\mu} \circ f f' + \frac{f''}{f'} \text{ et } \widehat{\nu} = \widehat{\nu} \circ f (f')^2 + S(f)$$

construites en prenant l'image inverse par la normalisante formelle, des équations satisaites par la forme normale. Nous allons regarder les conditions sur f pour que l'une de ces équations soit méromorphe. Ceci nous donnera l'équation d'un $\mathcal{D}$-groupoïde dont f sera une solution.

Premier cas, f est contractant ou dilatant : $|f'(0)| \neq 1$.

Dans ce cas f est analytiquement conjugué à sa partie linéaire. Comme les similitudes laissent stable le champ $x\frac{d}{dx}$, ces difféomorphismes sont solutions d'un groupoïde de rang 1, l'image inverse de $\mathcal{G}_1(\frac{-1}{x})$ par la linéarisante h, c'est-à-dire $\mathcal{G}_1(-\frac{h'}{h} + \frac{h''}{h'})$.

Deuxième cas, $|f'(0)| = 1$ et $f'(0)$ n'est pas une racine de l'unité.

Dans ce cas, f est formellement linéarisable.

Théorème 4.1 ([Malg2]). *Le difféomorphisme f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de rang fini si et seulement si f est analytiquement linéarisable.*

Preuve. – La preuve utilise la version du théorème de Maillet due à B. Malgrange [Malg1] :

Théorème. *Soient $F(x, y, y_1, ..y_n)$ une fonction holomorphe et $\widehat{\Phi}$ une solution formelle de $F(x, y, y', ..y^{(n)}) = 0$. Si le linéarisé de F le long de $\widehat{\Phi}$:*

$$\mathcal{L}_{\widehat{\Phi}} F = \frac{\partial F}{\partial y}(x, \widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}', ..\widehat{\Phi}^{(n)}) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}(x, \widehat{\Phi}, \widehat{\Phi}', ..\widehat{\Phi}^{(n)}) \frac{d^n}{dx^n}$$

est à singularité régulière alors $\widehat{\Phi}$ est convergente.

D'après la remarque 3.2, si f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde, elle est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de rang trois. Nous supposerons donc f solution de $\mathcal{G}_3(\nu)$. Sa linéarisante formelle $\widehat{\Phi}$ vérifie $\widehat{\Phi}(\lambda x) = f \circ \widehat{\Phi}$ où λ est la partie linéaire de f. Elle transforme ν en

$$\overline{\nu} = \nu \circ \widehat{\Phi} (\widehat{\Phi}')^2 + S_{\widehat{\Phi}}$$

qui est a priori une série formelle contenant un nombre fini de puissance négative de x. Elle doit cependant vérifier $\overline{\nu}(x) = \overline{\nu}(\lambda x)(\lambda)^2$. Comme $\lambda^k \neq 1$, $\overline{\nu}(x) = \frac{c}{x^2}$ pour une constante c. La linéarisante est donc une solution formelle de l'équation différentielle

$$\frac{c}{x^2} = \nu \circ \widehat{\Phi} (\widehat{\Phi}')^2 + S_{\widehat{\Phi}}.$$

On applique alors le théorème ci-dessus à :

$$F(x, y, y_1, y_2, y_3) = \left(\nu(y) y_1^2 + 2\frac{y_3}{y_1} - 3\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 - \frac{c}{x^2} \right) y_1^2 x^2 y^2.$$

Son linéarisé le long de $\widehat{\Phi}$ est

$$\nu'(\widehat{\Phi})(\widehat{\Phi}')^2 + \left(2\nu(\widehat{\Phi})\widehat{\Phi}' - 2\frac{\widehat{\Phi}'''}{(\widehat{\Phi}')^2} + 6\frac{(\widehat{\Phi}'')^2}{(\widehat{\Phi}')^3}\right)\frac{d}{dx} - \left(6\frac{\widehat{\Phi}''}{(\widehat{\Phi}')^2}\right)\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{\widehat{\Phi}'}\frac{d^3}{dx^3}.$$

Comme ν a un pôle d'ordre 2 en 0 et $\widehat{\Phi}$ s'annule une fois en 0, le linéarisé de notre équation le long de la solution formelle est à singularité régulière. □

Troisième cas, f est un difféomorphisme parabolique : $f'(0) = 1$.

Nous utiliserons les notations et les résultats de [MR2]. Nous noterons $a_{k,\lambda}(x) = 2i\pi\frac{x^{k+1}}{1+\lambda x^k}$ et $X_{k,\lambda} = a_{k,\lambda}\frac{d}{dx}$. Les germes de difféomorphismes $g_{k,\lambda} = \exp(X_{k,\lambda})$ sont les formes normales formelles des germes de difféomorphismes paraboliques. Ils admettent pour intégrales premières $H_{k,\lambda}(x) = x^{-\lambda}e^{1/kx^k}$. Pour tout $f(z) = z + cz^{k+1} + \ldots$, il existe un champ formel $\widehat{X} = cz^{k+1} + \ldots\frac{d}{dx}$ tel que $f = \exp\widehat{X}$ et un difféomorphisme formel $\widehat{h}$ qui conjugue $\widehat{X}$ à $X_{k,\lambda}$ (donc f à $g_{k,\lambda}$). Un théorème d'Écalle et Voronin dit que $\widehat{h}$ est k-sommable de somme (U_i, h_i) sur 2k secteurs U_i. On note $inv(f) = (h_i(U_i) \cap h_{i+1}(U_{i+1}), h_{i+1} \circ h_i^{-1})$ les invariants analytiques de Birkoff, Écalle, Voronin définis à automorphisme près sur le disque du modèle formel et $s(f) = (U_i \cap U_{i+1}, h_{i+1}^{-1} \circ h_i)$ leurs analogues sur Δ.

Lemme 4.2. *Soit f un difféomorphisme parabolique et $\widehat{X}$ le champ formel tel que $f = \exp(\widehat{X})$. Le difféomorphisme f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde si et seulement si $\widehat{X}$ est solution de sa $\mathcal{D}$-algèbre de Lie.*

Preuve. – Nous traiterons le cas où f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de rang trois, le cas où le $\mathcal{D}$-groupoïde est de rang deux ou un se traiterait de la même manière.
Soit $\mathcal{G}_3(\nu)$ le $\mathcal{D}$-groupoïde dont f est solution. Le groupe à un paramètre $\widehat{f}^{\circ t} = \exp t\widehat{X} = \Sigma_{n\geq 0}a_n(t)x^n$ définit des séries formelles convergentes au moins pour t entier, les a_n étant des polynômes en t. L'expression :

$$\nu - \nu\circ\widehat{f}^{\circ t}(\widehat{f}^{\circ t})'^2 - S(\widehat{f}^{\circ t})$$

avec ν méromorphe, nous donne une série formelle $\Sigma_{n\geq \deg(\nu)}b_n(t)x^n$ où les b_n sont des polynômes en t. Le difféomorphisme f et ses itérés vérifiant l'équation, les b_n s'annulent sur $\mathbb{Z}$ et sont donc identiquement nuls. Les séries $\widehat{f}^{\circ t}$ forment donc une famille à un paramètre de solutions formelles du groupoïde. En linéarisant

$$\nu - \nu\circ\widehat{f}^{\circ t}(\widehat{f}^{\circ t})'^2 - S(\widehat{f}^{\circ t}) \equiv 0$$

en $t = 0$, on trouve que le champs $\widehat{X}$ satisfait l'équation de $\mathcal{A}_3(\nu)$.

Réciproquement, supposons que le champ formel $\widehat{X}$ soit solution. Par des arguments standard de la théorie de la sommabilité des solutions d'équations différentielles linéaires, le polygone de Newton de l'équation de $\mathcal{A}_3(\nu)$ n'ayant qu'une pente, le champ est k-sommable pour un certain k. Ses sommes seront aussi solutions de $\mathcal{A}_3(\nu)$. Restreint sur chaque secteur de sommation, on a un groupoïde sans singularité. Dans ce cas l'exponentielle d'un champ solution de l'algèbre est solution du groupoïde [Mck]. Ceci étant valable sur tous les secteurs, l'exponentielle du champ est solution du $\mathcal{D}$-groupoïde. □

Proposition 4.3.

(1) *Si f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde, $s(f)$ est solution du même $\mathcal{D}$-groupoïde.*

(2) *Soit f de forme normale $g_{k,\lambda}$ et d'invariant analytique $inv(f)$, le difféomorphisme f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}$ de rang r si et seulement si il existe un $\mathcal{D}$-groupoïde de rang r admettant $g_{k,\lambda}$ et $inv(f)$ comme solutions.*

Preuve. – Nous regarderons dans un premier temps le cas où f est solution d'un groupoïde de rang trois.
Commençons par le (2). Soient f un difféomorphisme tangent à l'identité solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_3(\nu)$ et $\widehat{h}$ sa normalisante de k-somme (U_i, h_i). Les sommes sectorielles nous permettent de construire un groupoïde $\mathcal{G}_3(\overline{\nu}_i)$ sur $h_i(U_i)$ tels que $X_{k,\lambda}$ soit solution de sa $\mathcal{D}$-algèbre de Lie. Les $\overline{\nu}_i$ provenant tous du même ν par des transformation h_i ayant même développement asymptotique en 0, ils ont le même développement asymptotique en 0. De plus il est facile de déterminer précisement la forme de ces fonctions. Comme tous les $\overline{\nu}_i$ vérifient que le champ de vecteurs $a_{k,\lambda}\frac{d}{dx}$ est solution de $\mathcal{A}_3(\overline{\nu}_i)$, ils sont tous solution de l'équation différentielle linéaire

$$a'''_{k,\lambda} + \overline{\nu}_i a'_{k,\lambda} + \frac{\overline{\nu}'_i}{2} a_{k,\lambda} = 0.$$

C'est-à-dire qu'il existe des constantes c_i telles que

$$\overline{\nu}_i = \frac{c_i^2 - a'^2_{k,\lambda} + 2a''_{k,\lambda}a_{k,\lambda}}{a^2_{k,\lambda}}.$$

Pour que leurs développement asymptotiques soient les mêmes, il faut que les constantes soient égales. Les $\overline{\nu}_i$ sont donc égaux et définissent une fonction méromorphe $\overline{\nu}$ sur la réunion des $h_i(U_i)$. Par construction, $g_{k,\lambda}$ est solution de $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$ et les invariants analytiques de f laissent invariant $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$, ils sont donc aussi solutions de ce $\mathcal{D}$-groupoïde.

Inversement, supposons que $g_{k,\lambda}$ et $inv(f)$ soient solutions d'un $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$. Nous allons utiliser la remarque 3.6.(1) pour décrire $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$ comme groupoïde d'invariance de la dérivée schwartzienne d'une fonction $\overline{V}$. Puis nous tirerons en arrière cette fonction par chaque normalisante sectotielles. Sur chaque ouvert sectoriel $h_i(U_i)$ on peut choisir une primitive Schwartzienne de $\overline{\nu}$: $\overline{V}_i$ ($S(\overline{V_i}) = \overline{\nu}$) telles que $\overline{V}_i = \overline{V}_{i+1}$ pour $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ et $\overline{V}_1 = \gamma \circ \overline{V}_k$ où γ est une homographie. Comme $h_{i+1} \circ h_i^{-1}$ est solution de $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$,

$$\overline{V}_{i+1} \circ h_{i+1} \circ h_i^{-1} = \alpha_i \circ \overline{V}_{i+1}$$

pour une homographie α_i. On note V_i la fonction définie sur U_i par $\overline{V}_i \circ h_i$. Si $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, $V_{i+1} = \alpha_i \circ V_i$ et $V_1 = \alpha_k \circ \gamma \circ V_k$. Sur chaque secteur U_i, le pull-back par h_i du $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_3(\overline{\nu})$ est $\mathcal{G}_3(\nu_i)$ avec $\nu_i = S(V_i)$. On obtient ainsi un groupoïde de paramètre uniforme ν à croissance méromorphe en 0 ; d'après le théorème des singularités inexistantes de Riemann, ν est méromorphe en 0. Le difféomorphisme f étant solution sur les secteurs, il est solution de $\mathcal{G}_3(\nu)$.

Le (1) est conséquence du (2). Dans la construction précédente on obtient

$$V_{i+1} \circ (h_{i+1}^{-1} \circ h_i) = V_i \text{ et } V_1 \circ (h_1^{-1} \circ h_k) = \gamma \circ V_k.$$

En prenant le dérivée Schwartzienne de ces égalités, tous les $h_{i+1}^{-1} \circ h_i$ sont solutions de $\mathcal{G}_3(\nu)$.

Le cas des $\mathcal{D}$-groupoïdes $\mathcal{G}_2(\mu)$ se traite de la même manière. Le seul changement consiste à remplacer la primitive schwartzienne de ν par une solution de $\frac{V''}{V'} = \mu$. On étudie le cas des $\mathcal{D}$-groupoïdes $\mathcal{G}_1^k(\mu)$ à partir de $\mathcal{G}_2(\mu)$ qui les contient. Le cocycle $inv(f)$ est donc composé de solutions de $\mathcal{G}_2(\overline{\mu}) = \mathcal{G}_2(\frac{c-a'_{k,\lambda}}{a_{k,\lambda}})$ asymptotes à l'identité. Comme $\overline{\mu}$ a un pôle simple, la constante c doit être nulle. Dans ce cas, les seules solutions asymptotes à l'identité sont l'identité.

□

Le théorème suivant donne la liste des germes de difféomorphismes paraboliques ayant une $\mathcal{D}$-enveloppe de rang fini. Pour cela nous utiliserons les invariants "géométriques" $(\varphi_{i,i+1})$ de Martinet-Ramis définis par $\varphi_{i,i+1} \circ (H_{k,\lambda} \circ h_{i+1}) = H_{k,\lambda} \circ h_i$. Ils sont alternativement définis au voisinage de 0 ou de l'infini sur les sphères du chapelet décrivant l'espace des orbites de f [MR2].

Théorème 4.4.

(1) *Un difféomorphisme tangent à l'identité est solution d'un D-groupoïde de rang 3 si et seulement si il existe un entier positif p tel que les invariants géométriques soient de la forme* $\frac{\tau}{\sqrt[p]{1+a_i\tau^p}}$ *en* 0 *et* $\tau\sqrt[p]{1+\frac{b_i}{\tau^p}}$ *en* ∞. *De tels difféomorphismes seront appellés, d'aprés J.Écalle, binaires.*

(2) *Un difféomorphisme tangent à l'identité est solution d'un D-groupoïde de rang 2 si et seulement si il existe un entier p tel que les invariants géometriques soient de la forme* $\frac{\tau}{\sqrt[p]{1+a_i\tau^p}}$ *en* 0 *et* τ *en* ∞ *ou bien* τ *en* 0 *et* $\tau\sqrt[p]{1+\frac{b_i}{\tau^p}}$ *en* ∞. *De tels difféomorphismes seront appellés unitaires.*

Preuve. – Pour avoir la forme des invariants géométriques il faut considérer un $\mathcal{D}$-groupoïde dont $g_{k,\lambda}$ est solution, déterminer les solutions de ce groupoïde asymptotes à l'identité et commutant à $g_{k,\lambda}$ puis les lire dans la variable $H_{k,\lambda}$.

Commençons par le (1). Soit $\mathcal{G}_3$ un $\mathcal{D}$-groupoïde dont $g_{k,\lambda}$ est solution. Le champ $X_{k,\lambda}$ est solution de se $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\mathcal{A}_3$. Sur un secteur d'ouverture $\frac{2\pi}{k}$, $X_{k,\lambda}$ est conjugué à $X_{1,0}$, par une conjugaison qui fait correspondre à un germe sectoriel asymptote à l'identité, un germe sectoriel asymptote à l'identité et qui conjugue $H_{k,\lambda}$ à $H_{1,0}$ [MR2]. Le $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_3$ est donc conjugué sur ce secteur à un $\mathcal{D}$-groupoïde $\widetilde{\mathcal{G}}_3$ de $\mathcal{D}$-algèbre de Lie $\widetilde{\mathcal{A}}_3$. Par construction $X_{1,0}$ est solution de $\widetilde{\mathcal{A}}_3$ donc $\widetilde{\mathcal{A}}_3 = \mathcal{A}_3(\frac{-\gamma}{x^4})$, pour une constante complexe γ, et $\widetilde{\mathcal{G}}_3 = \mathcal{G}_3(\frac{-\gamma}{x^4})$. Les équations de $\mathcal{G}_3(\frac{-\gamma}{x^4})$ se résolvent explicitement. Un changement de variable $y = 1/x$ transforme le $\mathcal{D}$-groupoïde en $\mathcal{G}_3(-\gamma)$ sur un voisinage de l'infini. Les solutions locales de $\mathcal{A}_3(-\gamma)$ sont engendrées par les champs $\frac{d}{dx}$, $e^{-\delta y}\frac{d}{dx}$ et $e^{\delta y}\frac{d}{dx}$ avec $\delta^2 = \gamma$. Ces champs se réécrivent $e^{\delta y}\frac{d}{d(e^{\delta y})}$, $\frac{d}{d(e^{\delta y})}$, et $e^{2\delta y}\frac{d}{d(e^{\delta y})}$. Ceci signifie que les solutions de $\mathcal{G}_3(-\gamma)$ sont les homographies en la variable $e^{\delta y}$:

$$y \mapsto \frac{1}{\delta} \log\left(\frac{ae^{\delta y}+b}{ce^{\delta y}+d}\right)$$

pour n'importe quelle détermination du logarithme. Les solutions asymptotes à l'identité sont de la forme :

$$\begin{array}{lll} y & \mapsto & y+\frac{1}{\delta}\log(1+be^{-\delta y}) \text{ sur les secteurs } \Re(\delta y)>0 \\ y & \mapsto & y-\frac{1}{\delta}\log(1+ae^{\delta y}) \text{ sur les secteurs } \Re(\delta y)<0 \end{array}$$

pour la détermination du logarithme qui vaut 0 en 1. Pour qu'ils commutent à $g_{1,0}$ il faut que δ soit entier. En lisant ces éléments dans la variable $H_{1,0}=e^y$ on obtient la forme cherchée pour les invariants géométriques.

On prouve le (2) de la même manière. Soit $\mathcal{G}_2$ un $\mathcal{D}$-groupoïde dont $g_{k,\lambda}$ est solution. Pour les même raisons que précédement, déterminer les solutions asymptotes à l'identité de $\mathcal{G}_2$ revient à déterminer les solutions asymptotes á l'identité d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de Lie de rand deux vérifiant que $X_{1,0}$ est solution de sa $\mathcal{D}$-algèbre de Lie. Ces $\mathcal{D}$-groupoïdes sont $\mathcal{G}_2(\frac{\gamma-2x}{x^2})$. Ici encore, les équations de ces $\mathcal{D}$-groupoïde se résolvent. En faisant le changement de variable $y=\frac{1}{x}$, on transforme $\mathcal{G}_2(\frac{\gamma-2x}{x^2})$ en $\mathcal{G}_2(-\gamma)$ sur un voisinage de l'infini. Les solutions de $\mathcal{A}_2(-\gamma)$ sont engendré par les champs de vecteurs $\frac{d}{dy}$ et $e^{\gamma y}\frac{d}{dy}$ qui se réécrivent $e^{-\gamma y}\frac{d}{d(e^{-\gamma y})}$ et $\frac{d}{d(e^{-\gamma y})}$. Les solutions de $\mathcal{G}_2(-\gamma)$ sont les applications affines en la variable $e^{-\gamma y}$ c'est-à-dire,

$$y\mapsto\frac{-1}{\gamma}\log\left(ae^{-\gamma y}+b\right)$$

pour n'importe quelle détermination du logarithme. Les éléments asymptotes à l'identité sont :

$$y\mapsto y-\frac{1}{\gamma}\log(1+be^{\gamma y})$$

sur le secteur $\Re(\gamma y)<0$. Pour qu'une telle application commute à $g_{1,0}$ il faut que γ soit entier. Suivant le signe de γ on sera dans l'une des deux situations suivantes.

Le signe de γ est négatif. Le $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_2$ n'admet de solution asymptote à l'identité que sur les secteurs $\Re(x^k)>0$, qui correpondent au secteurs où l'intégrale première devient infinie. Les recollements des sphères se font donc par l'identité pour les recollements en 0 et par un germe de difféomorphisme de la forme cherchée pour les recollements en l'infini.

Le signe de γ est positif. Le $\mathcal{D}$-groupoïde n'admet de solution asymptote à l'identité que sur les secteurs $\Re(x^k)<0$ où l'intégrale première tend vers zéro. La situation est donc inversée. Les recollements des sphères se font donc par l'identité pour les recollements en l'infini et par un germe de difféomorphisme de la forme cherchée pour les recollements en 0. □

Quatrième cas, le difféomorphisme est résonnant : $f'(0)^k=1$

Si $f(x)=e^{2i\pi p/q}x+\ldots$ est un difféomorphisme résonnant alors $f^{\circ q}$ sera tangent à l'identité. Deux cas sont à regarder.

Le premier est celui des difféomorphismes périodiques de période k. Ces germes sont analytiquement linéarisable par $h=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda^i}f^{\circ i}$ où λ est la partie linéaire de f. Sa $\mathcal{D}$-enveloppe est donc de rang nul et est donnée dans la coordonnée linéarisante x par l'équation $x^k-y^k=0$.

Le deuxième cas, celui des difféomorphismes résonnant non périodique, est traité par la proposition suivante.

Proposition 4.5. *f est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde si et seulement si $f^{\circ q}$ est solution du même $\mathcal{D}$-groupoïde.*

Preuve. – Supposons que $f^{\circ q}$ est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}$. Lorsque nous normalisons sectoriellement $f^{\circ q}$, ses racines sont envoyées sur les racines de la forme normale : $e^{2i\pi p/q}\exp(\frac{1}{q}\frac{x^{q+1}}{1-\lambda x^q}\frac{d}{dx})$. Ces dernières sont solutions des $\mathcal{D}$-groupoïdes contenant la forme normale. Cela signifie que f est solution sur tous les secteurs, donc en 0, de $\mathcal{G}$. L'autre sens est évident. □

5. Un calcul explicite de l'équation de la $\mathcal{D}$-enveloppe d'un difféomorphisme

Franck Loray a remarqué que des équations similaires à celles des $\mathcal{D}$-groupoïdes sur Δ avait déjà été trouvées par J. Écalle dans *Les fonctions résurgentes* Tome 2 pp 472-490. Les résultats de J. Écalle permettent de calculer un élément privilégié de la classe de conjugaison d'un difféomorphisme donné puis de trouver pour les cas décrits au théorème 4.4 l'équation du $\mathcal{D}$-groupoïde dont il est solution. Le représentant de J. Écalle de la classe de conjugaison est solution d'un $\mathcal{D}$-groupoïde de paramètre rationnel. Malheureusement nous ne savons refaire les calculs que dans le cas d'un difféomorphisme unitaire, de résidu nul, c'est-à-dire formellement conjugué à $g_{k,0}$
Nous allons travailler dans la variable $y = \frac{1}{x}$ et noterons z la variable du plan de Borel. Soit f un germe de difféomorphisme de forme normale $g_{k,0}$. Nous pouvons supposer que f s'écrit $y(1-\frac{2i\pi}{y^k}+\frac{c}{y^{2k}}+\ldots)$. Nous allons regarder f dans la variable $ky^{1/k}$, la normalisante formelle donne alors une série formelle f^* en $y^{1/k}$ appellée itérateur de f qui vérifie

$$f^*\circ f = f^* - 2i\pi \text{ et } f^* = y + \widehat{F}.$$

Dans le cas des difféomorphismes unitaires et binaires, la théorie des fonctions résurgentes permet de calculer explicitement l'itérateur d'un germe de difféomorphisme "canonique" dans la même classe analytique que f. Nous pourrons, grâce à la proposition 4.3, calculer l'équation de la $\mathcal{D}$-enveloppe du germe canonique. Ces difféomorphismes canoniques ont la propriété que leurs $\mathcal{D}$-enveloppes sont des groupoïdes $\mathcal{G}_3(\nu)$ ou $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec ν et μ rationnelles (propositions 13e1 p475 et 13f6 p490 des *fonctions résurgentes* Tome 2).

Nous allons regarder $\widehat{F}$ dans le plan de Borel. Nous commencerons par rappeler quelques formules (voire [L]). Les objets en gras sont les versions sur le plan de Borel des objets du plan complexe. La transformé de Borel d'une série formelle $\widehat{G} = \sum_{n\geq 0} a_n y^{-(n+1)}$ est la série formelle $\mathbf{G} = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$. Cette transformation se généralise en définissant la fransformé de Borel de $y^{-(\alpha+1)}$ par $\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$ où $\alpha \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$ et Γ est la fonction d'Euler et celle de y^n pour $n\in\mathbb{N}$ par $\delta^{(n)}$ la n-ième dérivé de la masse de dirac en 0. La transformé de Borel du produit de deux séries formelles est un produit de convolution des deux transformés que nous noterons $*$. Les opérateurs de dérivation, d'exponentialisation et de conposition se traduisent dans le plan de Borel de la manière suivante ([L], 3.6) :

- $\boldsymbol{\partial} : g \mapsto -zg$
- $\mathbf{exp} : g \mapsto \delta + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}g^{*n}$
- $(\,\cdot\circ\phi) : g \mapsto g + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}(\phi-\delta')^{*n} * \boldsymbol{\partial}^n g.$

La transformée de $\widehat{F}$, $\mathbf{F}$ est une fonction holomorphe au voisinage de zéro dans la variable $z^{1/k}$ ayant des singularités au dessus de $\mathbb{Z}$. Ces singularités empèchent

$\mathbf{F}$ d'être une fonction entière donc $\widehat{F}$ de converger. Elles sont trés particulières et sétudient grâce au dérivations étrangères Δ_ω. Nous ne donnerons pas la définition des dérivées etrangères et renvoyons à [E] et [L].
La fonction $\mathbf{F}$ vérifie les équations de résurgence

$$\Delta_\omega \mathbf{F} = A_\omega \mathbf{exp}(-p\mathbf{F})$$

pour $w^k = p \in \mathbb{Z}$, où les A_ω sont des nombres complexes appellés coefficients de résurgence. Les difféomorphismes unitaires dont les homographies sont ramifiées à l'ordre p sont alors ceux dont l'itérateur n'a des coefficients de résurgence non nul qu'au dessus de p. Les difféomorphismes binaires d'invariants géométriques des homographies ramifiées à l'ordre p sont ceux dont l'itérateur n'a des coefficients de résurgence non nul qu'au dessus de p et $-p$.

Remarque 5.1. *Comme nous avons choisi l'itérateur qui conjuque le germe de difféomorphisme à la translation par $-2i\pi$, les coefficients de résurgence définis ci-dessus sont $-2i\pi$ fois ceux de* [E] *et* [L].

Théorème ([E]).

(1) *Deux difféomorphismes formellement conjugués le sont analytiquement si et seulement si ils ont les mêmes coefficients de résurgence.*
(2) *Si $\mathbf{F}$ est holomorphe en zéro dans la variable $z^{1/k}$, à croissance exponentielle d'ordre inférieur à un dans la variable z et vérifie les équations de résurgence ci-dessus, alors $y + \widehat{F}$ est l'itérateur d'un germe de difféomorphisme.*

Le cas unitaire de résidu nul

Nous allons construire un $\mathcal{D}$-groupoïdes dont f est solution en tirant en arrière un $\mathcal{D}$-groupoïdes dont la translation et les invariants analytique de f sont solutions. La preuve du (2) du théorème 4.4 nous donne le seul $\mathcal{D}$-groupoïde dont la translation et les invariants analytiques sont solutions, c'est $\mathcal{G}_2(p)$ avec p l'ordre de ramification des invariants. En partant de $\mathcal{G}_2(p)$ on construit un $\mathcal{D}$-groupoïdes dont f est solution de la manière suivante. L'itérateur f^* transporte $\mathcal{G}_2(p)$ sur un $\mathcal{D}$-groupoïdes, dans la variable $y^{1/k}$, dont f est solution : $\mathcal{G}_2(\widetilde{\mu})$ avec $\widetilde{\mu} = p\frac{df^*}{dy} + \frac{d}{dy}(log\frac{df^*}{dy})$. En revenant dans la variable y, on obtient un $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_2(\mu)$ dont f est solution, avec :

$$\mu(y) = \widetilde{\mu}(y^k)ky^{k-1} + \frac{k-1}{y}.$$

Nous allons utiliser le (2) du théorème prédent pour construire un itérateur en suivant [E] p473.
Soit φ un germe de fonction holomorphe nous avons la formule suivante ([E], [L]) :

$$\Delta_\omega(\boldsymbol{\varphi} \circ \gamma) = \boldsymbol{\partial\varphi} \circ \gamma * \Delta_\omega(\gamma).$$

En utilisant l'égalité :

$$\Delta_\omega(\frac{1}{p}\mathbf{log(1 + p} \cdot) \circ \gamma) = \Delta_\omega(\gamma) * \mathbf{exp}(-p\frac{1}{p}(\mathbf{log(1 + p} \cdot) \circ \gamma))$$

et le fait que $\Delta_\omega(\frac{1}{z^{1/k} - \omega}) = \frac{kp}{\omega}\delta$, une solution des équations est donnée par la formule :

$$\mathbf{F}(z) = \frac{1}{p}\mathbf{log(1 + p} \cdot) \circ \left(\sum_{\omega^k = p} \frac{\omega}{kp} \frac{A_\omega}{z^{1/k} - \omega} \right).$$

Pour obtenir la somme de l'itérateur sur un secteur, il faut prendre la transformé de Laplace de $\mathbf{F}$ le long d'une demi-droite évitant le point p. La transformé de Laplace est l'inverse de la transformé de Borel, elle transforme les symboles gras en leurs version sur le plan complexe. Nous noterons

$$f^*(y) = y + \int_0^\infty \mathbf{F}(z)e^{-zy}dz = y + \frac{1}{p}\log(1+p\cdot)\circ\left(\sum_{\omega^k=p}\frac{\omega}{kp}A_\omega\int_0^\infty\frac{e^{-zy}}{z^{1/k}-\omega}dz\right).$$

Comme

$$\frac{z-p}{z-\omega} = z^{(k-1)/k} - \left(\sum_{\widetilde{\omega}^k=p\ \widetilde{\omega}\neq\omega}\widetilde{\omega}\right) z^{(k-2)/k} + \ldots + (-1)^{k-1}\left(\prod_{\widetilde{\omega}^k=p\ \widetilde{\omega}\neq\omega}\widetilde{\omega}\right),$$

l'intégrale $I_\omega(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-zy}}{z^{1/k}-\omega}dz$ vérifie l'égalité

$$\frac{d}{dy}I_\omega = -pI_\omega - P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}}),$$

avec

$$P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}}) = \frac{\Gamma(1+\frac{k-1}{k})}{y^{1+(k-1)/k}} - \left(\sum_{\widetilde{\omega}^k=p\ \widetilde{\omega}\neq\omega}\widetilde{\omega}\right)\frac{\Gamma(1+\frac{k-2}{k})}{y^{1+(k-2)/k}} + \ldots + (-1)^{k-1}\left(\prod_{\widetilde{\omega}^k=p\ \widetilde{\omega}\neq\omega}\widetilde{\omega}\right)\frac{1}{y}.$$

Ceci permet de calculer

$$\frac{df^*}{dy} = \frac{1-\sum_{\omega^k=p}\frac{\omega}{kp}A_\omega P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}})}{1+p\left(\sum_{\omega^k=p}\frac{\omega}{kp}A_\omega I_\omega\right)}$$

puis $\widetilde{\mu}$:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(y) &= p\frac{df^*}{dy} + \frac{d}{dy}(log\frac{df^*}{dy})\\ &= p - \frac{\sum_{\omega^k=p}\frac{\omega}{kp}A_\omega\frac{d}{dy}(P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}}))}{1-\sum_{\omega^k=p}\frac{\omega}{kp}A_\omega P_\omega(\frac{1}{y^{1/k}})}.\end{aligned}$$

La $\mathcal{D}$-enveloppe du représentant canonique est $\mathcal{G}_2(\mu)$ avec $\mu(y) = \widetilde{\mu}(y^k)ky^{k-1} + \frac{k-1}{y}$. Dans le cas non ramifié, c'est-à-dire pour un difféomorphisme de la forme $x + 2i\pi x^2 - 8\pi x^3 + \ldots$ avec un seul invariant : A_p, on trouve que le paramètre du groupoïde est en y : $\mu(y) = p + \frac{A_p}{y^2-A_py}$ et en x : $\mu(x) = -\frac{p}{x^2} - \frac{2}{x} - \frac{A_p}{1-A_px}$ (voir [E] p 475).

Le cas binaire de résidu nul

Soit f un difféomorphisme binaire dont les invariants géométriques sont des homographies ramifiées à l'ordre p. Cela se traduit sur les coefficients de résurgences de l'itérateur de f par $A_\omega = 0$ si $\omega^{2k} \neq p^2$. Dans ce cas, les équations de résurgence sont plus difficiles à résoudre et nous n'y sommes pas arrivé. D'après la preuve du théorème 4.4, le $\mathcal{D}$-groupoïde admettant comme solutions la translation et les invariants analytiques d'un difféomorphisme binaire est $\mathcal{G}_3(-p^2)$. Le difféomorphisme f d'itérateur f^* est alors solution du $\mathcal{D}$-groupoïde (en la variable $ky^{1/k}$) $\mathcal{G}_3(\widetilde{\nu})$ avec :

$$\widetilde{\nu} = -p^2\left(\frac{df^*}{dy}\right)^2 + 2\frac{d^2}{dy^2}\left(log\frac{df^*}{dy}\right) - \left(\frac{d}{dy}\left(log\frac{df^*}{dy}\right)\right)^2.$$

D'après la proposition 4.3, le $\mathcal{D}$-groupoïde $\mathcal{G}_3(\nu)$ avec $\nu(y) = \widetilde{\nu}(y^k)(ky^{k-1})^2 - \frac{k^2+1}{y^2}$ est la $\mathcal{D}$-enveloppe de f.

Dans le cas des représentants canoniques formellement conjugués à $g_{1,0}$, J. Écalle trouve ([E] Tome 2 p490) :

$$\nu(y) = -p^2 - p^2\frac{B_pB_{-p}}{y^2} - 2p\frac{B_p - B-p}{y(y+B_p+B_{-p})} - \frac{(B_p+B_{-p})^2 + 2p(B_p+B_{-p})}{y^2(y+B_p+B_{-p})^2}$$

où les B_p sont les coinvariants. Dans le cas binaire, ils sont reliés aux coefficients de résurgence par $\frac{A_p}{A_{-p}} = \frac{B_p}{B_{-p}}$ et $\frac{p}{4i\pi}\sqrt{A_pA_{-p}} = \sin(\frac{p}{4i\pi}\sqrt{B_pB_{-p}})$.

Références

[C] G. Casale - *Suites de Godbillon-Vey et intégrales premières,* C. R. Acad. Sci. Paris **335** (2002)

[E] J. Écalle, *Les fonctions résurgentes Tomes 1 et 2,* Publications mathématiques d'Orsay, (1981)

[L] F. Loray, *Analyse des séries divergentes,* dans "Quelques aspects des mathématiques actuelles" *Aziz El Kacimi Alaoui, Hervé Queffélec, Carlos Sacré, Valerio Vassallo,* Ellipse (1998)

[Lie] S. Lie - *Transformationgruppen Tome 3,* Chelsea Publishing Co., Bronx, N.Y. (1970).

[Malg1] B. Malgrange - *Sur un théorème de Maillet,* Asymptotic analysis **2** (1989)

[Malg2] B. Malgrange - *Germes de $\mathcal{D}$-groupoïdes en dimension un,* (notes informelles) (2000)

[Malg3] B. Malgrange - *Le groupoïde de Galois d'un feuilletage,* Monographie **38** vol **2** de L'enseignement mathématique (2001)

[Malg4] B. Malgrange - *On the non linear Galois differential theory,* Chinese Ann.Math.Ser.B **23** $n°$**2**, (2002)

[Mck] K. Mackenzie - *Lie groupoids and Lie algebroids in differential geometry,* L.N.S. **124** Cambridge Univ. Press

[MR2] J. Martinet et J.P. Ramis - *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre.,* Ann. Sci. École Normale Sup. **16** (1983)