Mathématiques pour le signal discret – Ma32

Guy Casale

IRMaR bât 21 Beaulieu

`http ://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/`

Références

A First Course in Mathematical Analysis
David Brannan, Cambridge University Press

Mathématiques BTS-DUT Industriels
C. Larcher, M. Pariente, J.-C. Roy, Techniplus

1 Suites numériques

1.1 Quelques définitions.

Définition 1 *Une suite numérique est une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *(suite réelle) ou* $\mathbb{C}$ *(suite complexe) qui à un entier* n *associe un nombre* u_n*.*

Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* (u_n) *et* u_n *est appelé le terme général de la suite.*

Cette notation est une abréviation de $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots)$.

Exemples 1

- *Les décimales d'un nombre : l'écriture de* π *est* $(3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$.
- *Suites définies à partir d'une formule* f *en prenant les valeurs de* f *en les entiers : Si* $f(x) = \dfrac{x^2 + e^{\sin x}}{\sqrt{|x|} - \pi}$, f *définit une suite* $u_n = f(n)$.
- *Suites constantes* $u_n = c \in \mathbb{C}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:* $(c, c, c, c, c, \ldots)$.
- *La suite des températures (en* $^\circ C$*) relevées tous les matins à l'IUT :* $(8.5, 12, 9.2, 7.6, 8, \ldots)$.
- *Echantillonnage à la période* T_e *d'un signal* F *:*

$$(F(t_0), F(t_0 + T_e), \ldots, F(t_0 + nT_e), \ldots) = (u_0, u_1, \ldots u_n \ldots).$$

Nous verrons d'autres exemples dans la suite du cours.

Représentations graphiques

Opérations sur les suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

On définit la **somme** $(u_n) + (v_n)$ terme à terme :

$$\begin{array}{cccccccc} & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ + & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \dots v_n \dots &) \\ = & (& u_0+v_0 & u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 & u_4+v_4 & \dots u_n+v_n \dots &) \end{array}$$

On définit le **produit** $(u_n) \times (v_n)$ terme à terme :

$$\begin{array}{cccccccc} & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ \times & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \dots v_n \dots &) \\ = & (& u_0v_0 & u_1v_1 & u_2v_2 & u_3v_3 & u_4v_4 & \dots u_nv_n \dots &) \end{array}$$

On définit le **décalage "+1"** ou vers le futur (u_{n+1}) :

$$\begin{array}{cccccccccc} (u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ (u_{n+1}) & = & (& u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & \dots u_{n+1} \dots &) \end{array}$$

On définit le **décalage "-1"** ou vers le passé (u_{n-1}) :

$$\begin{array}{cccccccccc} (u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ (u_{n-1}) & = & (& 0 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \dots u_{n-1} \dots &) \end{array}$$

Définissez vous même les décalages $\pm k$ pour $k \in \mathbb{N}$:

Définition 2 *Une suite réelle (u_n) est dite*

- **majorée** *si*

- **minorée** *si*

- **bornée** *si*

- **croissante** *si*

- **décroissante** *si*

Remarque 1 *Une suite (z_n) de nombres complexes ne peut pas être qualifiée de décroissante ou décroissante car on ne peux pas toujours comparer deux nombres complexes. Les suites*
- *$(\Re e z_n)$ des parties réelles,*
- *$(\Im m z_n)$ des parties imaginaires,*
- *$(|z_n|)$ des modules*

peuvent être croissantes, décroissantes, bornées, ...

Deux caractérisations de la variation d'une suite :

- Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ est toujours
(resp.).

- Une suite réelle (u_n) de nombres **strictement positifs** est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est
(resp.).

Démonstration par récurrence.

Pour montrer que qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. On montre que la propriété est vraie au rang n_0 *i.e.* $P(n_0)$ est vraie.
2. On montre que si pour n fixé, $P(n-1)$ est vraie alors $P(n)$ l'est aussi *i.e.* $P(n-1) \Rightarrow P(n)$.

Exemple 1

Calculez par récurrence la somme des n premiers carrés :

$$Sc(n) = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

1.

2.

1.2 Limites & convergence

Définition 3 *On dit qu'une suite (u_n)* **tend (ou converge) vers** *un nombre ℓ si pour toute précision ε il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$ les nombres u_n soient à une distance ε de ℓ :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple 2 *Montrons qu'à partir d'un certain rang la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est plus petit que 10^{-10}.*

S'il existe, le nombre ℓ est appelé la **limite** de la suite (u_n) et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

S'il n'existe pas on dit que la suite **diverge**.

Exemples 2

- *La suite de terme général* $u_n = e^{-n}$ *converge vers* 0.

- *La suite de terme général* $u_n = \dfrac{n}{n+2}$ *converge vers* 1.

- *La suite de terme général* $u_n = n^2$ *ne converge pas.*

- *La suite de terme général* $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ *ne converge pas.*

Théorème 1

- *Si la limite existe elle est unique.*

- *Une suite convergente est bornée.*

- *Si* (u_n) *et* (v_n) *vérifient* $u_n = v_n$ *lorsque* $n > n_0$ *alors*
  (u_n) *converge si et seulement si* (v_n) *converge.*

- *S'il existe* $q \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_{n+q} = v_n$ *pour tout* n *alors*
  (u_n) *converge si et seulement si* (v_n) *converge.*
  Si elles convergent, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve. – ... $\square$

Théorème 2 *Toute suite croissante et majorée est convergente.*
(Toute suite décroissante et minorée est convergente.)

Preuve. – ...
$\square$

Exemple 3 *Montrons que la suite définie par* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ *converge.*

1.3 Règles opératoires sur les limites.

1.3.1 Combinaisons linéaires.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

1.3.2 b. Produits et quotients.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$
Si de plus les v_n ainsi que ℓ' sont non nuls alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell'}$.

1.3.3 Image par une fonction continue.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si f est une fonction continue en ℓ alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

1.4 Suites classiques.

1.4.1 Suites arithmétiques.

Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + r$.

On démontre (par récurrence) que $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r = 0$, la suite est constante, tous les termes valent u_0.

- Si $r > 0$, la suite est croissante mais n'est pas majorée.

- Si $r < 0$, la suite est décroissante mais elle n'est pas minorée.

La somme des n premiers termes d'un suite arithmétique vaut :
$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$

1.4.2 Suites géométriques.

Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = qu_n$.

On démontre (par récurrence) que $u_n = q^n u_0$.
Si $u_0 = 0$ tous les termes de la suite sont nuls. Sinon plusieurs cas se présentent :

- Si $q = 0$ la suite est constante égale à 0 à partir du second terme.

- Si $q = 1$ la suite est constante, tous le termes valent u_0.

- Si $q = -1$ la suite est vaut alternativement u_0 et $-u_0$.

- Si $|q| > 1$ la suite ne converge pas.

- Si $|q| < 1$ la suite converge vers 0.

La somme des n premiers termes d'un suite géométrique vaut :
$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n =$

1.4.3 Suites adjacentes.

Définition 4 *Deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont dites* **adjacentes** *si* (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante,* $u_n \leq v_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Proposition 1 *Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.*

Preuve. –

□

Exemple 4 *Étudions la convergence des suites*

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \dots \frac{1}{n^2}$$
$$v_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} \dots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}.$$

On peut calculer la limite de ces suites, elles tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$.

1.4.4 Suites extraites.

Définition 5 *Étant donnée une suite* (u_n)*, une suite* (v_n) *est extraite de* (u_n) *s'il existe une fonction* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *strictement croissante telle que* $v_n = u_{\phi(n)}$*.*

Exemple 5 *Si* (u_n) *est une suite, les suites* $v_n = u_{n^2}$ *et* $w_n = u_{2n+1}$ *sont des suites extraites de* (u_n)

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
(u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & \dots & \dots & u_n & \dots &) \\
 & \Rightarrow & (& u_0 & u_1 & \cancel{u_2} & \cancel{u_3} & u_4 & \cancel{u_5} & \cancel{u_6} & \cancel{u_7} & \cancel{u_8} & u_9 & \dots & \dots &) \\
(u_{n^2}) & = & (& u_0 & u_1 & u_4 & u_9 & u_{16} & u_{25} & u_{36} & u_{49} & \dots & \dots & u_{n^2} & \dots &) \\
|| & & (& || & || & || & || & || & || & || & || & \dots & \dots & || & \dots &) \\
(v_n) & = & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \dots & \dots & v_n & \dots &)
\end{array}$$

Théorème 3 *Si une suite* (u_n) *converge vers* ℓ *alors toute suite extraite de* (u_n) *converge vers* ℓ*.*

Preuve. – ... $\square$

Exemple 6 *La suite* $u_n = (-1)^n$ *ne converge pas car les suites extraites* $v_n = u_{2n} = 1$ *et* $w_n = u_{2n+1} = -1$ *ne convergent pas vers la même limite.*

Exemple 7 *La suite de nombres complexes* $z_n = e^{i\frac{\pi}{4}}$ *ne converge pas.*

1.4.5 Suites définies par récurrence.

Définition 6 *Une suite réelle (ou complexe) (u_n) est définie par récurrence à partir de son premier terme u_0 s'il existe une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2 *Si f est continue et si la suite (u_n) définie à partir de u_0 par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$.*

Preuve. – ... $\square$

Exemple 8 (La suite définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$)

Exemple 9 (La suite définie par $u_{n+1} = ru_n(1 - u_n)$)

Si $1 < r < 3$ la suite converge effectivement vers $\frac{r-1}{r}$.
Pour $r > 3$ le comportement de la suite est plus chaotique.
(c.f `http ://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map`)

1.4.6 Suites définies par une récurrence double.

Définition 7 *Une suite réelle (u_n) est définie par récurrence double à partir de ses deux premiers termes u_0 et u_1 s'il existe une fonction f de deux arguments telle que $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Regardons les suites réelles définies par une récurrence double linéaire :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \text{ avec } a \neq 0$$

$$i.e. \quad u_{n+2} = -\frac{b}{a}u_{n+1} - \frac{c}{a}u_n$$

L'équation

$$ar^2 + br + cb = 0 \tag{C}$$

s'appelle **l'équation caractéristique** associé, notons $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ alors $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de (C).

- Si $\Delta = 0$ alors $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double de (C).

- Si $\Delta < 0$ alors $u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)\rho^n$
où $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ sont les deux racines de (C).

Exemple 10 *La suite définie par*

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

à partir de $u_0 = 1$ et $u_1 = 0$ a-t-elle une limite ?