Suite définies par une récurrence double linéaire.

$$\alpha\ a_{n+2} + \beta\ a_{n+1} + \gamma\ a_n = b_n$$

α, β, γ étant des constantes et $(b_n)_n$ une suite données
et $(a_n)_n$ est la suite inconnue.

En utilisant la linéarité et le théorème d'avance, on obtient

$$\mathscr{Z}[a_n] = \frac{\mathscr{Z}[b_n] + \alpha a_0 z^2 + (\alpha a_1 + \beta a_0) z}{\alpha z^2 + \beta z + \gamma}$$

Reste à trouver $(a_n)_n$ ...

Exemple

Trouver une suite $(y_n)_n$ *telle que* $\begin{cases} y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = \delta(n) \\ y_0 = 1 \quad y_1 = 0 \end{cases}$.

Comparer avec l'exemple de la fin du chapitre sur les suites

Théorème

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On a

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n] \cdot \mathscr{Z}[b_n].$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\mathscr{Z}[f*g] = F(z) \cdot G(z)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}[(a*b)_n] &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a*b)_n \frac{1}{z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) \frac{1}{z^n} \\
\text{En remplaçant } n-k \text{ par } m: \quad &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_m \frac{1}{z^{k+m}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{1}{z^k} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \frac{1}{z^m} \right)
\end{aligned}$$

□

Théorème

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On a

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n] \cdot \mathscr{Z}[b_n].$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\mathscr{Z}[f*g] = F(z) \cdot G(z)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}[(a*b)_n] &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a*b)_n \frac{1}{z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) \frac{1}{z^n} \\
\text{En remplaçant } n-k \text{ par } m: \quad &= \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_m \frac{1}{z^{k+m}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{1}{z^k} \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \frac{1}{z^m} \right)
\end{aligned}$$

□

7 - Transformée inverse & Applications

Comment retrouver l'original d'une transformée en z ?

Exemple

On cherche une suite $(a_n)_n$ telle que $\begin{cases} 2a_{n+1} + a_n = U(n) \\ a_0 = 0 \end{cases}$.

La transformée en z étant linéaire on obtient

$$2\mathscr{Z}[a_{n+1}] + \mathscr{Z}[a_n] = \mathscr{Z}[U(n)]$$

Le théorème de l'avance donne

$$\mathscr{Z}[a_{n+1}] = z\left(\mathscr{Z}[a_n] - a_0\right),$$

et on a donc

$$2z\mathscr{Z}[a_n] + \mathscr{Z}[a_n] = \frac{z}{z-1} \text{ c'est-à-dire } \mathscr{Z}[a_n] = \frac{z}{(z-1)(2z+1)}.$$

Comment obtenir a_n ?

Soit $A(z)$ une fonction d'une variable complexe z.
Existe-t-il $(a_n)_n$ telle que $A(z) = \mathscr{Z}[a_n]$?

Première méthode : Développer $A(z)$ en série entière de $\frac{1}{z}$ en utilisant les tables de séries entières.

Deuxième méthode : Si $A(z)$ est une fraction rationnelle, on la décompose en éléments simples puis on utilise les propriétés de la TZ et les tables de transformées usuelles.

Exemple (fin de l'exemple précédent)

Prenons $A(z) = \frac{z}{(z-1)(2z+1)} = z\left(\frac{1/3}{z-1} - \frac{2/3}{2z+1}\right) = \frac{1}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{1}{3}\frac{z}{z+1/2}$.

Or d'après ce que nous avons déjà vu :

$$\mathscr{Z}[U(n)] = \frac{z}{z-1} \text{ et } \mathscr{Z}[(-1/2)^n U(n)] = \frac{z}{z+1/2}.$$ ici

Nous avons donc $\frac{z}{(z-1)(2z+1)} = \mathscr{Z}[a_n]$ *avec*

$$a_n = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n\right] U(n)$$

5 - Valeur initiale et valeur finale

Théorème (de la valeur initiale)

Soit $(a_n)_n$ une suite et $A(z)$ sa transformée en z. Si la limite existe on a :

$$\lim_{|z|\to+\infty} A(z) = a_0.$$

Démonstration.

...

□

Théorème (de la valeur finale)

Soit $(a_n)_n$ une suite et $A(z)$ sa transformée en z. Si les limites existent on a :

$$\lim_{|z|\to 1} A(z)\left(1-\frac{1}{z}\right) = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Démonstration.

...

□

6 - Transformée en z et convolution

Rappels

1. *Si f et g sont deux fonctions nulles sur $\mathbb{R}_{<0}$, on note* $(f*g)(x) = \int_0^x f(\tau)g(x-\tau)d\tau$ *le* **produit de convolution** *de f et g.*
2. *Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites, on note* $(a*b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ *le* **produit de convolution** *de $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.*

Théorème

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On a

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n]\cdot\mathscr{Z}[b_n].$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\mathscr{Z}[f*g] = F(z)\cdot G(z)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}[(a*b)_n] &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a*b)_n \frac{1}{z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\frac{1}{z^n} \\
\text{En remplaçant } n-k \text{ par } m: \quad &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_m \frac{1}{z^{k+m}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{1}{z^k}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \frac{1}{z^m}\right)
\end{aligned}$$

□

Théorème

Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On a

$$\mathscr{Z}[(a*b)_n] = \mathscr{Z}[a_n]\cdot\mathscr{Z}[b_n].$$

Soient f et g deux signaux casaux et $F(z)$ et $G(z)$ leurs transformées en z de période d'échantillonnage T_e. On a

$$\mathscr{Z}[f*g] = F(z)\cdot G(z)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathscr{Z}[(a*b)_n] &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a*b)_n \frac{1}{z^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)\frac{1}{z^n} \\
\text{En remplaçant } n-k \text{ par } m: \quad &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_m \frac{1}{z^{k+m}} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{1}{z^k}\right)\left(\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \frac{1}{z^m}\right)
\end{aligned}$$

□

b. Retard

Théorème (du retard)

Soit $(a_n)_n$ une suite ; notons $(b_n)_n$ la suite donnée par

$$\begin{array}{rcll} b_n & = & a_{n-p} & \text{si } n \geq p > 0 \\ b_n & = & 0 & \text{si } n < p \end{array}.$$

Alors

$$\mathscr{Z}[b_n] = \frac{1}{z^p}\mathscr{Z}[a_n].$$

Démonstration.

...

L'égalité du théorème de réécrit

$$\mathscr{Z}[U(n-p)a_{n-p}] = z^{-p}\mathscr{Z}[a_n].$$

c. Avance

Théorème (de l'avance)

Soit $(a_n)_n$ une suite ; notons $(b_n)_n$ la suite donnée par $b_n = U(n)a_{n+1}$.
Alors

$$\mathscr{Z}[bw_n] = z(\mathscr{Z}[a_n] - a_0).$$

Démonstration.

...

On peut généraliser ce théorème par récurrence :

$$\mathscr{Z}[U(n)a_{n+p}] = z^p\left(\mathscr{Z}[a_n] - \sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_k}{z^k}\right).$$

d. Multiplication par n.

Proposition

Soit $(a_n)_n$ une suite. Alors $\mathscr{Z}[na_n] = -z\frac{d}{dz}\mathscr{Z}[a_n]$.

Démonstration.

...

e. Multiplication par q^n, $q \in \mathbb{C}$.

Proposition

Soit $(a_n)_n$ une suite. Alors $\mathscr{Z}[q^n a_n](z) = \mathscr{Z}[a_n]\left(\frac{z}{q}\right)$.

Démonstration.

...

4 -Transformée d'un signal périodique

Théorème

Soient $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$ et f un signal mT_e-périodique. Notons f_0 le signal

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \in [0, mT_e[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors $\mathscr{Z}[f(nT_e)] = \frac{z^m}{z^m - 1}\mathscr{Z}[f_0(nT_e)]$,

ou avec d'autres notations :

$$F(z) = \frac{z^m}{z^m - 1}F_0(z).$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

Démonstration.

...

2 - Exemples fondamentaux.

a. Échelon unité :

Le signal est

$$U(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$U(nT_e) = 1.$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[U(nT_e)] = \sum_{n=0}^{+\infty} U(nT_e)\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{z}{z-1}$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 1$.

b. Suite de Dirac :

La suite est définie par

$$\begin{aligned} \delta(0) &= 1 \\ \delta(nT_e) &= 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}_{>0}. \end{aligned}$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[\delta(nT_e)] = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta(nT_e)\frac{1}{z^n} = \delta(0)\frac{1}{z^0} = 1$$

c. Suite exponentielle :

Le signal est

$$f(t) = q^t = \exp(t \ln q).$$

Son échantillonage à la période T_e est la suite de terme général

$$f(nT_e) = q^{nT_e}.$$

Sa transformée en z :

$$\mathscr{Z}[q^{nT_e}] = \sum_{n=0}^{+\infty} q^{nT_e}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{q^{T_e}}{z}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q^{T_e}}{z}} = \frac{z}{z-q^{T_e}}$$

pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\frac{q^{T_e}}{z}\right| < 1$ *i.e.* $|z| > |q|^{T_e}$.

En particulier

$$\mathscr{Z}[q^n] = \frac{z}{z-q} \text{ pour } |z| > |q|.$$

3 - Propriétés.

a. Linéarité

Théorème

Soient $(a_n)_n$, $(b_n)_n$ deux suites et λ, μ deux nombres. Alors

$$\mathscr{Z}[\lambda a_n + \mu b_n] = \lambda\mathscr{Z}[a_n] + \mu\mathscr{Z}[b_n].$$

Démonstration.

...

□

Exemples

Calculons $\mathscr{Z}[\cos(\omega n)]$ et $\mathscr{Z}[\sin(\omega n)]$.

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

1 - Définitions et notations.

Définition

La transformée en z d'une suite $(a_n)_n$ est la somme de la série :

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{1}{z^n}.$$

Si le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n$ est $R > 0$ alors $A(z)$ est bien définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\frac{1}{z}\right| < R$ soit $|z| > \frac{1}{R}$.

Le fonction $A(z)$ est aussi notée $\mathscr{Z}[a_n]$.
On appelle $(a_n)_n$ l'original de $A(z)$.

Exemple

Si $a_n = 1$ pour tout n alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{z^n}$ est 1.
Pour $|z| > 1$ on a

$$A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{z^n} = \frac{1}{1 - 1/z} = \frac{z}{z-1}.$$

Définition

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction nulle sur $\mathbb{R}_{<0}$ (signal causal) et $T_e \in \mathbb{R}_{>0}$. L'échantillonnage de f de période T_e est la suite

$$(f(nT_e))_n = (f(0), f(T_e), f(2T_e), f(3T_e), \ldots)$$

La transformée en z d'un échantillonage $(f(nT_e))_n$ est la somme de la série :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nT_e)\, \frac{1}{z^n}.$$

lorsqu'elle existe.

On la note $F(z)$, $\mathscr{Z}[f(nT_e)]$ ou $\mathscr{Z}[f]$ si T_e est explicite.

Applications

- Quel est le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$?
- Calculons à 10^{-3} près

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x} dx.$$

- Trouvons une solution de l'équation différentielle

$$2xy'' + 2y' - y = 0$$

telle que $y(0) = 1$ sous forme de série entière.

7 - Séries de Laurent

Définition

Une série de Laurent est une série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n = \sum_{n\geq 0} a_n x^n + \sum_{n\leq -1} a_n x^n.$$

C'est la somme d'une série entière et d'une série entière en x^{-1}.

Réécrivons la série :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n = \underbrace{\sum_{n\geq 0} a_n\, x^n}_{\text{Converge si } |x|<R_1} + \underbrace{\sum_{n\geq 1} a_{-n}\, x^{-n}}_{\text{Converge si } |x^{-1}|<R_2}.$$

Pour que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$ converge il faut que $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} a_{-n}\, x^{-n}$ convergent, c'est-à-dire

$$\frac{1}{R_2} < |x| < R_1.$$

Exemples

- *Calculons le domaine de convergence réel et le domaine de convergence complexe ainsi que la somme de la série de Laurent*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n x^n$$

avec

$$a_n = \begin{cases} 2^{-n} \text{ si } n \geq 0 \\ n^{-1} \text{ si } n \leq -1 \end{cases}.$$

- *Que se passe-t-il avec la série de Laurent*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n x^n$$

donnée par

$$b_n = \begin{cases} 2^{n} \text{ si } n \geq 0 \\ n^{-1} \text{ si } n \leq -1 \end{cases} ?$$

Développement en série de Laurent

- Calculons les développements en série de Laurent de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

suivant que $|x| < 1$ ou $|x| > 1$.

- Calculons le développement en série de Laurent de la fonction

$$g(x) = e^{2/x} - \cos 3x.$$

Démonstration.

...

□

Exemples

1. *Calculons la somme de la série entière* $\sum (n+2)x^n$.
2. *Calculons* $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$.

6 - Développement en série entière

Définition

Soit $\mathscr{D}$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *ou un disque de* $\mathbb{C}$ *contenant* 0. *Une fonction* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *(resp.* $\mathbb{C}$*) est dite développable en série entière en* 0 *s'il existe une série entière* $\sum a_n x^n$ *de rayon de convergence* $R > 0$ *telle que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ pour tout } |x| < R.$$

Si elle existe cette série est unique et coïncide avec la série de Taylor de f *en* 0.

Exemples

- *La fonction (réelle ou complexe)* $f(x) = e^x$ *est la somme de la série*
  ...
- *La fonction réelle* $g(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ *prolongée par* $g(0) = 0$ *est de classe* $\mathscr{C}^\infty$ *mais n'est pas developpable en série entière.*

Développements en série entière de fonctions usuelles

Fonction		Série	Rayon de convergence
$\frac{1}{1-x}$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$R = 1$
e^x	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$R = +\infty$
$\cos x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sin x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$

$\cosh x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$R = +\infty$
$\sinh x$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$R = +\infty$
$(1+x)^\alpha$	$=$	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$=$	$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$R = 1$
$\vdots$			

3 - Somme d'une série entière

Définition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Notons D_R son domaine de convergence. La somme de la série $\sum a_n x^n$ est une fonction de x, $f : D \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans certain cas on peut calculer cette somme

Exemples

- *La somme de la série* $\sum x^n$ *est* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ *pour* $x \in]-1,1[$.
- *La somme de* $\sum \dfrac{x^n}{n}$ *est* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ *pour* $x \in]-1,1[$.
- *La somme de* $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$ *est* $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2} = ??$ *pour* $x \in]-1,1[$.

4 - Opérations sur les séries entières

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1 et R_2 et de somme $f_1(x)$ et $f_2(x)$ respectivement.

a - Combinaisons linéaires

Proposition

Si λ_1 et λ_2 sont deux nombres, la série $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ a un rayon de convergence R tel que
- $R = min(R_1, R_2)$ si $R_1 \neq R_2$,
- $R \geq R_1$ si $R_1 = R_2$.
La somme de $\sum(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n$ est

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n)x^n = \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x).$$

Démonstration.

- c.f. le cours sur les suites- □

b - Multiplication

Proposition

Le produit de deux série entière est une série entière :

$$\left(\sum a_n x^n\right) \times \left(\sum b_n x^n\right) = \sum c_n x^n$$

avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.
Le rayon de convergence R de cette série entière vérifie $R \geq min(R_1, R_2)$.

Démonstration.

... □

Exemple

Calculons la série $\sum x^n \times \sum n x^n$.

5 - Propriétés de la somme

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et $f(x)$ la fonction définie par la somme de cette série.

- *f est continue sur $]-R, R[$ et pour tout $[a,b] \subset]-R, R[$,*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b a_n x^n dx.$$

- *f est dérivable sur $]-R, R[$ et sa dérivée est obtenue comme la somme*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ pour tout } x \in]-R, R[$$

- *f a pour primitive valant 0 en 0 la somme*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} dx.$$

Lemme

Si la série $\sum a_n X^n$ converge et $|x| < |X|$ alors la série $\sum a_n x^n$ converge absolument.

Démonstration.

...

□

Théorème

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Il existe un unique nombre $R \geq 0$, éventuellement infini, tel que :

- *si $|x| < R$, la série converge absolument,*
- *si $|x| > R$, la série diverge.*

Ce nombre est appelé le rayon de convergence de la série.

Démonstration.

...

□

Définition

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. L'ensemble des x tels que $|x| < R$ est le domaine de convergence de la série.

Si on travaille avec des nombres réels, c'est un intervalle.

Si on travaille avec des nombres complexes, c'est un disque.

Exemples

- *Le rayon de convergence de la série réelle $\sum x^n$ est 1 car ...*

  Elle ne converge que pour $x \in]-1, 1[$.

- *Le rayon de convergence de la série réelle $\sum \frac{x^n}{n}$ est 1 car ...*

  Elle converge pour $x \in [-1, 1[$.

- *Le rayon de convergence de la série réelle $\sum \frac{x^n}{n^2}$ est 1 car ...*

  Elle converge pour $x \in [-1, 1]$.

2 - Détermination du rayon de convergence

- ## Critère de d'Alembert

  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \neq 0$
  alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

- ## Critère de Cauchy

  Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell \neq 0$
  alors le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est $R = \frac{1}{\ell}$.

Démonstration.

- c.f. cours sur les séries numériques -

□

Remarques

- Le critère de d'Alembert ne s'applique que si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
- Si $\ell = 0$ alors $R = +\infty$, si $\ell = +\infty$ alors $R = 0$.

Exemples

- *La série réelle $\sum \frac{1}{n!} x^n$.*
  Critère de d'Alembert :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

  Le rayon de convergence est $+\infty$.
  Le domaine de convergence de cette série est $\mathbb{R}$.

- *La série réelle $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.*
  Critère de Cauchy :

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1 - \frac{1}{n}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}.$$

  Le rayon de convergence est e.
  Le domaine de convergence de cette série est $]-e, e[$.

La série $\sum z^n$.

Proposition

- *Si* $|z| \geq 1$ *la série* $\sum z^n$ *est divergente.*
- *Si* $|z| < 1$ *la série* $\sum z^n$ *converge absolument et sa somme vaut*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Exemple

Calculons les sommes des deux séries $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *avec*

$$a_n = \frac{\cos n\theta}{2^n} \text{ et } b_n = \frac{\sin n\theta}{2^n}.$$

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

1 - Définitions et notations.

Définition

Une série entière est une série $\sum a_n x^n$ *où* x *est un nombre réel ou complexe et* a_n *est le terme général d'une suite de nombres réels ou complexes.*

Ce sont des sommes infinies de puissances de x. Elles généralisent donc les polynômes.

Exemples

- *Si* $a_n = 0$ *lorsque* $n > p$ *alors* $\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p$.
- *Si* $a_n = 1$ *pour tout* n *alors* $\sum x^n$ *est une série géométrique.*

Remarque

Si $|x| < 1$ *la série* $\sum x^n$ *est une fonction de* x *que vous connaissez :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Comparaison avec une intégrale

Théorème
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ une fonction continue et décroissante.
La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Démonstration.
...

Exemple (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, les séries $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont appelées séries de Riemann.

Montrons qu'une série de Riemann converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

4- Séries à termes réels

Définition
Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** *si la série $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème
Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente alors elle converge.

Démonstration.
...

Exemple
Montrons que la série $\sum \frac{\sin n}{n^2}$ converge.

Séries alternée

Définition
Une série $\sum u_n$ est dite **alternée** *si ces termes sont alternativement positifs et négatifs.*

Théorème
Soit $\sum u_n$ une série alternée. Si $|u_n|$ décroit et tend vers 0 alors la série $\sum u_n$ est convergente. Plus précisement,

$$|R_N| = |\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n| \leq |u_{N+1}|.$$

Démonstration.
...

Exemple
Montrons que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais ne converge pas absolument.

5- Séries à termes complexes

Proposition
Une série à termes complexes $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries à termes réels $\sum \Re e(u_n)$ et $\sum \Im m(u_n)$ convergent.

Définition
Une série à termes complexes $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** *si la série à termes positifs $\sum |u_n|$ est convergente.*

Théorème
Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes absolument convergente alors elle converge.

Démonstration.
...

Théorèmes de comparaison

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.*
- *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Démonstration.

...

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Théorèmes de comparaison

Théorème

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge.

Rappel

$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ *si* $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

Démonstration.

...

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$ diverge.

Critère de d'Alembert

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si $\ell < 1$, la série converge,*
- *Si $\ell > 1$, la série diverge.*

Démonstration.

...

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n!}$ converge.

Critère de Cauchy

Théorème

Soit $\sum u_n$ une série à terme positifs telle que $\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

- *Si $\ell < 1$, la série converge,*
- *Si $\ell > 1$, la série diverge.*

Démonstration.

...

□

Exemple

Montrons que la série $\sum \frac{1}{n^n}$ converge.

Séries géométriques

La série géométrique de premier terme a et de raison q est

$$\sum aq^n.$$

Théorème

- *Si* $|q| < 1$ *la série* $\sum aq^n$ *converge vers* $\frac{a}{1-q}$.
- *Si* $|q| \geq 1$ *et* $a \neq 0$ *la série* $\sum aq^n$ *est divergente.*

Démonstration.

- c.f. le cours sur les suites - □

Exemple

Montrons que $0,33333\ldots = \frac{1}{3}$.

Séries téléscopiques

Exemple

Les sommes partielles de la série $\sum(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ *se calculent facilement.*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1}) &= \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{N}\tfrac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N+1}\tfrac{1}{n} \\ &= 1 - \tfrac{1}{N+1}\end{aligned}$$

Calculons la somme de $\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

Fixons $p \in \mathbb{N}_{>0}$. *Que pouvez-vous dire de la série* $\sum \frac{1}{n(n+p)}$ *?*

Opérations sur les séries

Proposition

Soient $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries,* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

. . . □

Remarques

- *Si* $\sum u_n$ *converge et* $\sum v_n$ *diverge alors* $\sum u_n + v_n$ *diverge.*
- *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *divergent alors on ne sait rien sur* $\sum u_n + v_n$.
  Considérez $u_n = 1/n$ *et* $v_n = -1/n$.
- *La série produit* $\sum u_n v_n$ *n'a pas pour somme* $(\sum u_n)(\sum v_n)$.
  Considérez $u_n = (1/2)^n$ *et* $v_n = (1/3)^n$.

3- Séries à termes positifs

Ce sont les séries $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Une série à terme positifs $\sum u_n$ *est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée.*

Démonstration.

Condition suffisante : La suite (S_N) des sommes partielles est croissante car $S_{N+1} - S_N = u_{N+1} \geq 0$. Si de plus elle est majorée alors elle converge (c.f. cours sur les suites).

Condition nécessaire : Si la suite des sommes partielles (S_N) converge, elle est majorée (c.f. cours sur les suites). □

Exemples

- *Série géométrique de raison plus petite que 1 : $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.*
  Les sommes partielles valent

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} = \frac{1-(1/2)^{N+1}}{1-1/2}.$$

  C'est une série convergente et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2.$

- *Série géométrique de raison plus grande que 1 : $u_n = 2^n$.*
  Les sommes partielles valent

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 2^n = \frac{1-2^{N+1}}{1-2}.$$

  C'est une série divergente.

Théorème

- *Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ vérifient $u_n = v_n$ lorsque $n > p$ alors*
  $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge
- *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+q} = v_n$ pour tout n alors*
  $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum v_n$ converge

Démonstration.

- Si $N > p$ on a $\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N} v_n = \sum_{n=0}^{p} u_n - v_n = A.$

  Les sommes partielles vérifient $\sum_{n=0}^{N} u_n = A + \sum_{n=0}^{N} v_n$. et sont donc de même nature.
- On a $\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-q} v_n = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N-q} u_{n+q} = \sum_{n=0}^{q} u_n = B.$

  Les suites des sommes partielles sont donc de même nature.

□

2- Premières propriétés

Proposition

Si la série $\sum u_n$ converge alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.

On a $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $u_N = S_N - S_{N-1}$ donc

$$\lim_{N\to+\infty} u_N = \lim_{N\to+\infty} S_N - \lim_{N\to+\infty} S_{N-1} = S - S = 0.$$

□

Remarque

Cette proposition n'est pas utile pour prouver qu'une série converge mais seulement pour prouver qu'une série diverge.

Exemples

- *La série géométrique de raison q : $\sum q^n$ diverge lorsque $|q| \geq 1$.*

La série harmonique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$

Le terme général tend vers 0 mais la série diverge.

Les sommes partielles sont $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$. Considérons la suite extraite : $T_N = S_{2^N}$. On a alors

$$T_{N+1} - T_N = \sum_{n=1}^{2^{N+1}} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{2^N} \frac{1}{n} = \sum_{n=2^N+1}^{2^{N+1}} \frac{1}{n}$$

$$\geq 2^N \times \frac{1}{2^{N+1}} = \frac{1}{2}.$$

La suite extraite (T_N) diverge, la suite (S_N) est donc aussi divergente : la série harmonique diverge.

Voir aussi l'exercice 6 du TD 1

Interprétation physique sur `http://www.etudes.ru (/ru/mov/mov006/index.php)`

Exemple

Trouvons une formule pour calculer le terme général de la suite définie par

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$$

à partir de $u_0 = 1$ *et* $u_1 = 0$.

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

1 - Définitions et notations.

Définitions

Soit (u_n) *une suite numérique. La suite* (S_N) *de terme général*

$$S_N = u_0 + u_1 + \ldots + u_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

est appelée **série** *de terme général* u_n.

S_N *est la* **somme partielle d'ordre** N. *On notera* $\sum u_n$ *la série de terme général* u_n.

Définitions

Soit $\sum u_n$ *une série numérique. Elle est dite convergente si la suite des sommes partielles* (S_N) *converge vers un nombre* S.

Dans ce cas S *est appelé* **somme** *de la série et est noté* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,

et $R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$ *est le* **reste d'ordre** N *de la série.*

Une série non convergente est dite divergente.

Théorème

Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Démonstration.

...

□

Exemple

La suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas car les suites extraites $v_n = u_{2n} = 1$ et $w_n = u_{2n+1} = -1$ ne convergent pas vers la même limite.

Exemple

La suite de nombres complexes $z_n = e^{in\pi/4}$ ne converge pas.

e. Suites définies par récurrence.

Définition

Une suite réelle (ou complexe) (u_n) est définie par récurrence à partir de son premier terme u_0 s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Si f est continue et si la suite (u_n) définie à partir de u_0 par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ alors $\ell = f(\ell)$.

Démonstration.

...

□

Représentation graphique. (la suite $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$)

Exemple (l'application logistique)

Fixons un paramètre $1 < r < 4$ et considérons la suite donnée par $0 < u_0 < 1$ et

$$u_{n+1} = f(u_n) = ru_n(1 - u_n)$$

Montrons par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$.
Si la suite a une limite celle-ci vaut ...

Si $1 < r < 3$ la suite converge effectivement vers $\frac{r-1}{r}$.
Pour $r > 3$ le comportement de la suite est plus chaotique.
(c.f `http ://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map`)

e. Suites définies par une récurrence double.

Définition

Une suite réelle (ou complexe) (u_n) est définie par récurrence double à partir de ses deux premiers termes u_0 et u_1 s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) telle que $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Regardons les suites réelles définies par une récurrence double linéaire :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \text{ avec } a \neq 0.$$

L'équation

$$ar^2 + br + cb = 0 \qquad \text{(C)}$$

s'appelle **l'équation caractéristique** associé, notons $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Si $\Delta > 0$ alors $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les deux racines de (C).
- Si $\Delta = 0$ alors $u_n = (\lambda n + \mu)r^n$ où r est la racine double de (C).
- Si $\Delta < 0$ alors $u_n = (\lambda \cos n\theta + \mu \sin n\theta)\rho^n$
où $r_1 = \overline{r_2} = \rho e^{i\theta}$ sont les deux racines de (C).

4 - Suites classiques.

a. Suites arithmétiques.

Une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = u_n + r$.
On démontre (par récurrence) que $u_n = u_0 + nr$.

- Si $r = 0$, la suite est constante, tous les termes valent u_0.
- Si $r > 0$, la suite est croissante mais n'est pas majorée.
- Si $r < 0$, la suite est décroissante mais elle n'est pas minorée.

La somme des $n+1$ premiers termes d'un suite arithmétique vaut :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n &= \sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} u_0 + ir \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} u_0 + r\sum_{i=0}^{i=n} i \\ &= (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

b. Suites géométriques.

Une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est définie par récurrence par $u_{n+1} = qu_n$.
On démontre (par récurrence) que $u_n = q^n u_0$.

Si $u_0 = 0$ tous les termes de la suite sont nuls. Sinon plusieurs cas se présentent :
- Si $q = 0$ la suite est constante égale à 0 à partir du second terme.
- Si $q = 1$ la suite est constante, tous le termes valent u_0.
- Si $q = -1$ la suite est vaut alternativement u_0 et $-u_0$.
- Si $|q| > 1$ La suite ne converge pas.
- Si $|q| < 1$ La suite converge vers 0.

La somme des $n+1$ premiers termes d'un suite géométrique vaut :

$$\begin{aligned} u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n &= \sum_{i=0}^{i=n} u_i = \sum_{i=0}^{i=n} q^i u_0 \\ &= u_0 \sum_{i=0}^{i=n} q^i \\ &= u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \end{aligned}$$

c. Suites adjacentes.

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** *si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$*

Proposition

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite.

Démonstration.

...

Exemple

Étudions la convergence des suites $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n}$ (définies pour $n \geq 1$).

On peut calculer la limite de ces suites, elles tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$.

d. Suites extraites.

Définition

Étant donnée une suite (u_n), une suite (v_n) est extraite de (u_n) s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_n = u_{\phi(n)}$.

Exemple

Si (u_n) est une suite, les suites $v_n = u_{n^2}$ et $w_n = u_{2n+1}$ sont des suites extraites de (u_n)

$$\begin{array}{rcccccccccccccc} (u_n) &=& (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & \ldots & \ldots & u_n & \ldots &) \\ (u_{n^2}) &=& (& u_0 & u_1 & & & u_4 & & & & & u_9 & \ldots & \ldots &) \\ & & (& u_0 & u_1 & u_4 & u_9 & u_{16} & u_{25} & u_{36} & u_{49} & \ldots & \ldots & u_{n^2} & \ldots &) \\ & & \| & & & & & & & & & & & & & \\ (v_n) &=& (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & \ldots & \ldots & v_n & \ldots &) \end{array}$$

2 - Limites & convergence

Définition

On dit qu'une suite (u_n) **tend (ou converge) vers** *un nombre ℓ si pour toute précision ε il existe un rang N tel que pour $n \geq N$ les nombres u_n soient à une distance ε de ℓ :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \textit{tel que} \quad n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

Exemple

Montrons qu'à partir d'un certain rang la suite de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ (définie pour $n \geq 1$) est plus petit que 10^{-10}.

S'il existe, le nombre ℓ est appelé la **limite** de la suite (u_n) et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell.$$

S'il n'existe pas on dit que la suite **diverge**.

Exemples

- *La suite de terme général $u_n = e^{-n}$ converge vers 0.*
- *La suite de terme général $u_n = \frac{n}{n+2}$ converge vers 1.*
- *La suite de terme général $u_n = n^2$ ne converge pas.*
- *La suite de terme général $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2})$ ne converge pas.*

Théorème

- *Si la limite existe elle est unique.*
- *Une suite convergente est bornée.*
- *Si (u_n) et (v_n) vérifient $u_n = v_n$ lorsque $n > p$ alors (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge*
- *S'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+q} = v_n$ pour tout n alors (u_n) converge si et seulement si (v_n) converge*

Démonstration.

...

□

Théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente.
(Toute suite décroissante et minorée est convergente.)

Démonstration.

Soit (u_n) une suite réelle croissante majorée. Notons ℓ le plus petit des majorants. Nous allons montrer que la suite tend vers ℓ.

Nous ne prouverons pas que ℓ existe ici, c.f. la référence et/ou un autre livre.

Prenons un $\varepsilon > 0$.

Comme ℓ est le plus petit majorant de la suite, il existe un nombre u_N tel que

$$\ell - \varepsilon \leq u_N \leq \ell.$$

La suite étant croissante et majorée par ℓ on a

$$N \leq n \Rightarrow \ell - \varepsilon \leq u_N \leq u_n \leq \ell.$$

On a bien $n \geq N \quad \Rightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon$. □

Exemple

Montrons que la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$ converge.

3 - Règles opératoires sur les limites.

a. Combinaisons linéaires.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

b. Produits et quotients.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$

Si de plus les v_n ainsi que ℓ' sont non nuls alors $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell'}$.

c. Image par une fonction continue.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et si f est une fonction continue en ℓ alors

$$f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(\ell).$$

d. Suite équivalentes.

Si $\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ alors (u_n) et v_n sont de même nature.

Opérations sur les suites.

On définit la **somme** $(u_n) + (v_n)$ terme à terme :

$$\begin{array}{cccccccc} & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ + & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \dots v_n \dots &) \\ = & (& u_0+v_0 & u_1+v_1 & u_2+v_2 & u_3+v_3 & u_4+v_4 & \dots u_n+v_n \dots &) \end{array}$$

On définit le **produit** $(u_n) \times (v_n)$ terme à terme :

$$\begin{array}{cccccccc} & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ \times & (& v_0 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \dots v_n \dots &) \\ = & (& u_0v_0 & u_1v_1 & u_2v_2 & u_3v_3 & u_4v_4 & \dots u_nv_n \dots &) \end{array}$$

On définit le **décalage "+1"** (u_{n+1}) :

$$\begin{array}{ccccccccc} (u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ (u_{n+1}) & = & (& u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & \dots u_{n+1} \dots &) \end{array}$$

On définit le **décalage "-1"** (u_{n-1}) :

$$\begin{array}{ccccccccc} (u_n) & = & (& u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \dots u_n \dots &) \\ (u_{n-1}) & = & (& 0 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \dots u_{n-1} \dots &) \end{array}$$

Définitions

Une suite réelle (u_n) est dite

- **majorée** *s'il existe un nombre M tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **minorée** *s'il existe un nombre m tel que $m \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **bornée** *si elle est minorée et majorée,*
- **croissante** *si $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
- **décroissante** *si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque

Une suite (v_n) de nombres complexes ne peut pas être qualifiée de croissante ou décroissante. Les suites

- $(\Re ev_n)$ *des parties réelles,*
- $(\Im mv_n)$ *des parties imaginaires ou*
- $(|v_n|)$ *des modules*

peuvent être croissantes, décroissantes, bornées, ...

Deux caractérisations de la variation d'une suite :

- Une suite réelle (u_n) est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $u_{n+1} - u_n$ est toujours positive (resp. négative).
- Une suite réelle (u_n) de nombres strictement positifs est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est toujours supérieur (resp. inférieur) à 1.

Démonstration par récurrence

Pour montrer que qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$:

1. *On montre que la propriété est vraie au rang n_0 i.e. $P(n_0)$ est vraie.*
2. *On montre que si pour n fixé, $P(n-1)$ est vraie alors $P(n)$ l'est aussi i.e. $P(n-1) \Rightarrow P(n)$.*

Exemple

Démontrez par récurrence que
$Sc(n) = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

1. $Sc(1) = 1 = \frac{1}{6}(1.2.3)$, *la propriété est vraie pour $n = 1$.*
2. *Supposons que $Sc(n-1) = \frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)$ alors*

$$\begin{aligned} Sc(n) &= Sc(n-1) + n^2 = \tfrac{1}{6}((n-1)n(2n-1) + 6n^2) \\ &= \tfrac{1}{6}n(2n^2+3n+1) = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \end{aligned}$$

Exemple

Montrez qu'une suite (u_n) vérifiant $u_{n+1}u_{n-1} = u_n^2$ et $u_1 > u_0$ est croissante.

Mathématiques pour le signal discret – Ma32

Guy Casale

IRMAR bât 21 Beaulieu
http://perso.univ-rennes1.fr/guy.casale/

Référence

A First Course in Mathematical Analysis
David Brannan, Cambridge University Press

Mathématiques BTS-DUT Industriels
C. Larcher, M. Pariente, J.-C. Roy, Techniplus

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

- Chapitre 1 : Suites numériques
- Chapitre 2 : Séries numériques
- Chapitre 3 : Séries entières
- Chapitre 4 : Transformée en Z

1 - Quelques définitions.

Définition

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ (suite réelle) ou $\mathbb{C}$ (suite complexe) qui à un entier n associe un nombre u_n.

Une suite est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n) et u_n est appelé le terme général de la suite.

Cette notation est une abréviation de $(u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 \ldots)$.

Exemples

- *Les décimales d'un nombre : l'écriture de π est* $(3, 1, 4, 1, 5, \ldots)$.
- *Suites définies à partir d'une formule f en prenant les valeurs de f en les entiers : Si* $f(x) = \dfrac{x^2 + e^{\sin x}}{\sqrt{|x|} - \pi}$, *$f$ définit une suite $u_n = f(n)$.*
- *Echantillonnage à la période T_e d'un signal F :*

$$(F(t_0), F(t_0 + T_e), \ldots, F(t_0 + nT_e), \ldots) = (u_0, u_1, \ldots u_n \ldots).$$

Représentations graphiques