Feuille d'exercices n°5

5.1. Comment se déplace une balle sur un plan horizontale munit d'un repère orthonormé si sa vitesse au point (x, y) est donnée par le vecteur $(y, -x)$? Et si sa vitesse au point (x, y) est donnée par le vecteur $(y + \epsilon x, -x - \epsilon y)$?

5.2. Dessinez les courbes paramétrées pas quelques solutions des systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases}$ **b)** $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ **c)** $\dfrac{d}{dx} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

5.3. Intégrez les systèmes différentiels suivants :

a) $\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$ **b)** $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 16 & 9 \\ -25 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

d) $\dfrac{d}{dx} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ **e)** $y''' - 3y' + 2y = t^2 + e^t$

5.4. Considérons l'équation d'ordre 2 $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Montrez que le rapport $\dfrac{y'}{y}$ est solution d'une équation de Ricatti. Considérons ensuite le système :

$$\begin{cases} y_1' = a(x)\ y_1 + b(x)\ y_2 \\ y_2' = c(x)\ y_1 + d(x)\ y_2. \end{cases}$$

Montrez que le rapport $\dfrac{y_1}{y_2}$ est solution d'une équation de Ricatti.

5.5. Intégrez l'équation différentielle $(1 + x)y'' + (4x + 5)y' + (4x + 6)y = e^{-2x}$ en posant $y = ze^{-2x}$.

5.6. Soit à intégrer l'équation différentielle

$$(1 - x)y'' + xy' - y = 2 - 2x + x^2.$$

1°) Pour quelles valeurs de x ne peut-on pas appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz ?

2°) Trouvez une solution particulière $y_1(x)$ de l'équation sans second membre associée (on la cherchera polynomiale).

3°) Effectuez le changement d'inconnue $y_h = y_1 z$ dans l'équation sans second membre. Trouvez toutes les solutions de l'équation obtenue et déduisez-en celle de l'équation sans second membre sous la forme $C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x)$, C_1 et C_2 étant deux constantes.

4°) Cherchez une solution particulière de l'équation sous la forme $A(x)\varphi_1(x) + B(x)\varphi_2(x)$ en imposant de plus que $A'(x)\varphi_1(x) + B'(x)\varphi_2(x) = 0$

5°) Donnez l'ensemble des solutions de l'équation.