Feuille d'exercices n°4

4.1. En faisant un changement d'inconnue adéquat, résolvez les équations suivantes sur tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$:

a) $2te^x\dfrac{dx}{dt} + e^x - t^2 = 0,$

b) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{t+1}{t^2}x - 2\dfrac{x}{t}\log(\dfrac{x}{t}),$

c) $(1+t^2)\dfrac{dx}{dt} = 2t(1+x^2)\arctan x.$

4.2. Intégrez les équations de Bernouilli suivantes :

a) $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{t}x = x^2,$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = ax + bx^k$ avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}_{\geq 2},$

c) $\dfrac{dx}{dt}\cos t + x\sin t = -x^3,$ **d)** $t^5\dfrac{dx}{dt} = 3t^4x - x^3.$

4.3. Considérons l'équation suivante

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t^2}{2xt}.$$

1°) Montrez que si $x(t)$ est une solution alors la fonction $\overline{x}(t) = \lambda x(\frac{t}{\lambda})$ est aussi une solution pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

2°) Faites le changement d'inconnue $z = x/t$ dans l'équation et résolvez la.

3°) Appliquez la même méthode pour trouver une équation $F(t,x) = C$ définissant les solutions de

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^3 - 3t^2x}{t^3 - 3tx^2}$$

lorsque C parcourt les nombres réels.

4.4. Intégrez les équations de Ricatti suivantes :

a) $\dfrac{dx}{dt} = (t^2+1)x^2 - x - t^2,$

b) $-(t^2+1)\dfrac{dx}{dt} + 2t^3x + (1-t^2)x^2 = (t^2+1)^2,$

c) $(1-t^3)\dfrac{dx}{dt} + 2tx^2 - t^2x - 1 = 0.$

4.5. Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 9x = 0,$ **b)** $x'' - 7x' + 12x = 0,$

c) $x'' + 2x' + 10x = 20,$ **d)** $x'' - 7x' + 12x = x,$

e) $x'' - x = 5t + 2,$ **f)** $x'' + x' - 2x = 8\sin 2t,$

g) $x'' + 6x' + 5x = e^{2t},$ **h)** $x'' + 4x = 2\sin 2t,$

4.6. - Oscillateur amorti forcé -

L'abscisse (éventuellement curviligne) d'un oscillateur de fréquance $1/\omega$ vérifie l'équation $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$. Résolvez cette équation. Présentez la solution en mettant en évidence l'amplitude A et la phase de l'oscillation φ. Faites de même pour un oscillateur amorti : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2x = 0$, $0 < \lambda < \omega$ étant le coefficient de frottement amortissant le mouvement ; puis pour un oscillateur amorti forcé par une force périodique : $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\dfrac{dx}{dt} + \omega^2x = \overline{A}\cos(\overline{\omega}t + \overline{\varphi})$. Interprétez et commentez les résultats.