Feuille d'exercices n°3

3.1. Pour chacunes des équations suivantes, déterminez le lieu où s'applique le théorème de Cauchy-Lipschitz puis intégrez les équations et discutez des solutions maximales.

a) $\dfrac{dx}{dt} = 2t\sqrt{1-x^2}$ **b)** $\dfrac{dx}{dt} = \exp(x+t)$ **c)** $\sqrt{1-t^2}\dfrac{dx}{dt} = \sqrt{1-x^2}$

3.2. Considérons notre équation favorite :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t.$$

et sa solution $u(t)$ vérifiant $u(0) = 1$.

1°) En utilisant la méthode d'Euler, calculez à la main les approximations obtenues pour un pas de 1/2 sur le segment $[-1, 1]$. Ces valeurs sont-elles des approximations par excès ou par défaut ?

2°) Démontrez que pour tout pas h, l'approximation d'Euler $u_h(t)$ de cette solution vérifie pour tout $t > 0$

$$u_h'(t) \leq u_h(t)^2 - t.$$

3°) En déduire que $u_h(t) \leq u(t)$ pour tout $t > 0$.

3.3. *Méthode d'"Euler améliorée"*

On définit les valeurs approchées d'une solution de l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

par la récurrence

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h \\ x_{i+1} &= x_i + h\frac{f(t_i, x_i) + f(t_i + h, x_i + hf(t_i, x_i))}{2} \end{aligned}$$

en partant de $\begin{bmatrix} t_0 \\ x_0 \end{bmatrix}$

1°) Expliquez sur un dessin comment on trouve x_{i+1}.

2°) Appliquez cette méthode à une équation du type $\frac{dx}{dt} = g(t)$. Comment s'appelle cette méthode de calcul approché d'une intégrale ?

3.4.

1°) Quelles sont les fonctions $f(t, x)$ définies sur un rectangle, lipschitzienne de constante 0 ?

2°) Montrez que dans ce cas l'inégalité fondamentale (qui a été montrée seulement pour une consatnte de Lipschitz $K \neq 0$) est l'inégalité limite obtenue en faisant tendre K vers 0 dans le majorant. Commentez le résultat.

3°) Dessinez les approximations d'Euler.