Feuille d'exercices n°2

Tous les calculs sont faisable à la main mais si vous ne savez pas les faire ou si vous ne savez pas les interpréter, utilisez un ordinateur (avec, par exemple, MAPLE ou MATLAB).

2.1. Considérons succéssivement les équations différentielles autonomes suivantes :

$$\textbf{a)}\ \frac{dx}{dt} = x^2 \qquad \textbf{b)}\ \frac{dx}{dt} = x^2 + 1 \qquad \textbf{c)}\ \frac{dx}{dt} = x^2 - 1.$$

Pour chacune des équations :

1°) Trouvez les solutions constantes.

2°) Dessinez les isoclines de pentes -2, -1, 0, 1 et 2. Étudiez les lieux de croissance-décroissance ainsi que ceux de convexité-concavité des solutions. Esquissez le graphe de quelques solutions.

3°) Résolvez l'équation et modifiez votre dessin si nécessaire.

4°) Quels sont les intervalles de définitions de solutions maximales ?

Considérons maintenant l'équation $\frac{dx}{dt} = x^2 + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

5°) Discutez suivant le signe de c de l'existence de solutions bornées ainsi que l'existence de solutions définies pour tout t positif.

2.2. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - t^2$$

1°) Dessinez quelques isoclines ainsi que le lieu d'inflexion des solutions (un peu difficile).

2°) Esquissez quelques solutions caractéristiques.

3°) Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

4°) Pensez-vous qu'il existe des solutions définies sur $\mathbb{R}$ et toujours positive ?

5°) Vérifiez que le l'image du graphe d'une solution par une rotation de centre $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et d'angle π est encore le graphe d'une solution.

2.3. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

1°) Dessinez quelques isoclines de pentes -2, -1, 0, 1 et 2 ainsi que le lieu d'inflexion des solutions (un peu difficile).

2°) Esquissez quelques solutions caractéristiques.

3°) En utilisant le fait que $x^2 + t^2 \geq x^2$, montrez que les intervalles de définitions des solutions maximales sont des intervalles majorés (aussi difficile)?

Pour vous aider :

3+°) Prenons une solution de l'équation différentielle : $x(t)$ telle que $x_{t_0} = x_0 > 0$. Considérons la fonction $v(t) = \frac{1}{c-t}$ définie sur $]-\infty, c[$ et passant par le point $\begin{bmatrix} t_0 \\ x_0 - \epsilon \end{bmatrix}$ pour un petit ϵ positif. Montrez que les graphes de v et x ne peuvent pas s'intersecter. En déduire que x a une asymptote verticale. Justifiez l'existence d'une asymptote verticale pour toutes les solutions maximales.

4°) Vérifiez que si $x(t)$ est une solution, $\underline{x}(t) = -x(-t)$ en est aussi une. Qu'en déduisez vous sur la solution maximale passant par $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (si elle existe !)

2.4. Considérons l'équation différentielle:

$$\frac{dx}{dt} = t\cos x$$

1°) Déterminez les solutions constantes.

2°) Dessinez quelques isoclines de pentes -2, -1, 0, 1 et 2 ainsi que le lieu d'inflexion des solutions (ici, c'est facile).

3°) Esquissez quelques solutions caractéristiques. Quelles sont les intervalles de définition des solutions maximales ?

Cette équation a la propriété de pouvoir se résoudre par quadrature *i.e.* avec une formule, comme celles du premier exercice mais avec une formule plus compliquée. L'équation se réécrit

$$\frac{dx/dt}{\cos x} = t.$$

4°) Supposons que $x(t)$ soit une solution, en faisant le changement de variable $u = x(t)$, calculez

$$\int \frac{\frac{dx}{dt}}{\cos x} dt.$$

5°) Donnez une formule "explicite" pour les solutions de l'équation et vérifiez qu'elles sont bien définie sur les intervalles trouvés en 3°).

2.5. Considérons l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4x.$$

C'est une équation autonome qui n'est pas sous forme résolue.

0°) Existe-t-il des solution négative ?

1°) Trouvez les solutions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $u(t) = at^2 + bt + c$ avec a, b, c des réel. Existe-t-il d'autres solutions ? Existe-t-il des solution négative ?

2°) Donner les solutions maximales de l'équation.

3°) Donner les solutions maximales de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2.6. Étudiez l'équation différentielle $\quad \dfrac{dx}{dt} = |x - t|.$

2.7. Pour chaque équation linéaire suivante :

1°) étudiez les solutions de l'équation homogène associée,

2°) trouvez une solution particulière,

3°) donnez les solutions maximales et leurs intervalles de définition,

4°) donner la (ou les) solutions maximales ayant la condition initiale indiquée et dessinez la.

a) $\dfrac{dx}{dt} = x + t \ ; \ x(1) = 2$

b) $\cos t\dfrac{dx}{dt} - \sin tx = \sin t \ ; \ x(0) = 2$

c) $\dfrac{dx}{dt} + 2x = (t-2)^2 \ ; \ x(2) = 0$

d) $\dfrac{dx}{dt} = x + \cos t \ ; \ x(\pi/2) = 1$

e) $\dfrac{dx}{dt} + 2tx = 0 \ ; \ x(1) = 1$

f) $\dfrac{dx}{dt} + x\tan t = \sin t\cos t \ ; \ x(\pi/4) = 0$

g) $(1+x^2)\dfrac{dx}{dt} - xt = 0 \ ; \ x(1) = 1$

h) $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t^2-1}x \ ; \ x(0) = 1$

i) $(1-t^3)\dfrac{dx}{dt} + (2+t^2)x = 0 \ ; \ x(\pi^{12}) = 0$

j) $t\dfrac{dx}{dt} - 2x = t^4 \ ; \ x(1) = 1$