Feuille d'exercices n°1

1.1. Classez les fonctions suivantes suivant leurs ordres de grandeur en 0 :

$$1\ ,\ x^2\sin^2 x\ ,\ x^3\ ,\ \frac{1}{x^2}\ ,\ \sqrt{3x+2}-\sqrt{6x-1}, e^{-1/x^2}\ ,\ \frac{1}{x}.$$

Classez les fonctions suivantes suivant leurs ordres de grandeur en 1 :

$$1\ ,\ (x-1)^2\sin^2 x\ ,\ x^{200}-1\ ,\ \cos^3(\frac{\pi}{2}x)\ ,\ \frac{1}{\sin 2\pi x}.$$

1.2. Étudiez la continuité, les éventuels prolongements par continuité, la dérivabilité des prolongements et la continuite de la dérivée pour les fonctions suivantes

$$\sin\frac{1}{x}\ ,\ x\sin\frac{1}{x}\ ,\ x^2\sin\frac{1}{x}$$

(*n'oubliez pas de dessiner grossièrement leurs graphes*).

1.3. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrez que $\ln x \leq x-1$ si $x>1$.

1.4. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrez que $|\sin x-\sin y| \leq |x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

1.5. Étudiez les variations et tracez le graphe de la fonction $\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$ puis de la fonction $\sqrt{\left|\frac{x^3}{x-1}\right|}$.

1.6. Donnez un exemple de fonction dont la dérivée est négative en un point mais qui ne soit pas décroissante au voisinage de ce point.

1.7. Pour chacune des fonctions suivantes, donnez une équation pour la tangente au graphe au point indiqué et trouvez la position du graphe par rapport à cette tangente.

$$(i)\ \sin^2 x-\frac{x^2}{1+x^2}\text{ en } x=0,\quad (ii)\ \sin x+\arcsin x+2 \text{ en } x=0,\quad (iii)\ \sqrt{3x}-\sqrt{2+x}\text{ en } x=1.$$

⋆ **1.8.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $|f'(x)|\leq \eta<1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Fixons un point $x_0\in\mathbb{R}$ et considérons la suite définie par récurrence par $x_{n+1}=f(x_n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.
a) Montrez que

$$|x_{n+p}-x_n| \leq \frac{\eta^n}{1-\eta}|x_1-x_0|.$$

Déduisez-en que la suite converge.
b) Combien l'équation $f(x)=x$ a-t-elle de solution ?

⋆ **1.9.** Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction concave.
Démontrez par récurrence sur p l'inégalité suivante

$$f(\sum_{i=1}^p t_i a_i) \geq \sum_{i=1}^p t_i f(a_i)$$

où les $a_i, 1\leq i\leq p$, appartiennent à $[a,b]$ et les $t_i, 1\leq i\leq p$, sont des nombres positifs tels que $\sum_{i=1}^p t_i = 1$.
La moyenne arithmétiques des $a_i, 1\leq i\leq p$, est $m_a=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^p a_i$. Leur moyenne géométrique est $m_g=(\Pi_{i=1}^p a_i)^{1/p}$. Quelle est la plus grande moyenne des deux ?

1.10. Classez les fonctions suivantes suivant leurs ordres de grandeur en $+\infty$:

$$1 \ , \ x^2 \sin x \ , \ x^3 \ , \ \frac{1}{x^2} \ , \ \sqrt{3x+2} + \sqrt{6x-1} \ , \ e^x \ , \ \frac{1}{x} \ , \ e^{2x}.$$

1.11. Construisez le graphe $\mathscr{G}$ de $e^{-x} \sin x$. Commencez par montrer que le graphe est entièrement compris entre les courbes d'équations $y + e^{-x} = 0$ et $y - e^{-x} = 0$ et vérifiez que les points d'inflexion de $\mathscr{G}$ sont les points de contacts de $\mathscr{G}$ avec ces courbes.

1.12. Étudiez les fonctions

$$f_1(x) = x - (x^3+1)^{1/3} \quad \text{puis} \quad f_2(x) = x e^{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1.13. Tracez les courbes paramétrées suivantes :

$$\mathscr{C}_1 : \begin{cases} x(t) = t + \sin t \\ y(t) = 3 + \cos t \end{cases} ; \quad \mathscr{C}_2 : \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^4 - 4t^2 \end{cases} ; \quad \mathscr{C}_3 : \begin{cases} x(t) = t + \frac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 - \frac{1}{t} \end{cases}$$

1.14. Tracez la courbe définie par l'équation $2y^3 - 2yx = 1$.

1.15. Tracez la courbe définie par l'équation $y^3 - yx^2 - 2x = 0$.

1.16. Tracez les courbes de niveau des fonctions suivantes :
- $f_1(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ pour les valeurs $-1, 0, 1, 4, 9$;
- $f_2(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ pour les valeurs $-4, 1, 0, 1, 4$.

Pour ces deux fonctions donnez une paramétrisation des courbes $f_1(x,y) = 1$ et $f_2(x,y) = 1$.

$\star$ **1.17.** Discutez suivant les valeurs des six constantes réelles A, B, C, D, E, F la courbe définie par le polynôme en deux variables de degré deux :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$