Rudiments d'analyse complexe

ENSAI automne 2012

Guy CASALE

Notes de cours incomplètes.

Ce cours est une introduction à l'étude des fonctions holomorphes. Ces dernières sont des fonctions f d'un argument complexe z à valeurs $f(z)$ complexes satisfaisant certaines propriétés que nous allons décrire.

Le visionnage du film DIMENSION (`http ://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm`) est fortement recommandé.

Table des matières

Référence

Lars V. Ahlfors – Complex Analysis

Notations. *Dans tout le cours U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*

Quelques rappels de topologie

Une partie $E \subset \mathbb{R}^2$ est connexe si elle n'est pas la réunion de $E \cap U_1$ et $E \cap U_2$ avec U_1 et U_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^2$.

Proposition. *Une partie $E \subset \mathbb{R}^2$ est connexe si et seulement si les seules fonctions continues locallement constantes sur E sont les fonctions constantes.*

Dans le cas d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ la connexité est équivalente à la connexité par arc :

U est connexe par arc si pour tout couple $(a, b) \in U^2$ il existe une application continue $\gamma : [0, 1] \to U$ telles que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$.

Exercice 1. *Montrez l'affirmation ci-dessus.*

U est simplement connexe si $\mathbb{R}^2 - U$ est connexe. Heuristiquement, U n'a pas de trou.

Exercice 2. *Donnez des exemples d'ouverts simplement connexes du plan.*

1 Définition

1.1 Rappel sur la différentiabilité

Définition. *Une application* $f : U \to \mathbb{R}^2$ *est différentiable en* $(x, y) \in U$ *si il existe une application linéaire* $Df_{(x,y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *telle que*

$$f(x + h_1, y + h_2) = f(x, y) + Df_{(x,y)} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + o(|h_1| + |h_2|).$$

Lorsque $f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ est différentiable on a

$$Df_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}.$$

Heuristiquement, f ressemble à une application affine de partie linéaire $Df_{(x,y)}$ au voisinage de (x, y).

1.2 Fonction holomorphe (1)

Définition. *Une application* $f : U \to \mathbb{R}^2$ *est une fonction holomorphe si elle est différentiable sur* U *et sa différentielle est partout une similitude.*

Une application $f : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$ est holomorphe si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \qquad \text{(équations de Cauchy-Riemann).}$$

Conséquences :

- u et v sont harmoniques : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.
  (Le graphe d'un fonction harmonique $u : U \to \mathbb{R}$ est une surface minimal de $\mathbb{R}^3$.)
- v est déterminée à une constante près par u.
- f préserve les angles orientés entre les courbes.

1.3 Premier exemple

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{bmatrix}$$

Notons x et y les coordonnées sur le premier plan et u, v celles sur le second. Cette application du premier plan dans le second peux être visualisée en regardant les images des droites $x = c^{te}$ et $y = c^{te}$.

Pour $c \in \mathbb{R}$, la droite $x = c$ est paramétrée par $t \mapsto \begin{bmatrix} c \\ t \end{bmatrix}$. Son image est donc paramétrée par $t \mapsto \begin{bmatrix} c^2 - t^2 \\ 2ct \end{bmatrix}$. Cette courbe est aussi $\{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mid v^2 = 4c^2(c^2 - u)\}$, c'est une parabole dont on peux facilement esquisser l'allure, sauf pour $c = 0$.

De même pour $d \in \mathbb{R}$, la droite $y = d$ est paramétrée par $t \mapsto \begin{bmatrix} t \\ d \end{bmatrix}$. Son image est donc paramétrée par $t \mapsto \begin{bmatrix} t^2 - d^2 \\ 2dt \end{bmatrix}$. Cette courbe est aussi $\{\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mid v^2 = 4d^2(u + d^2)\}$, c'est encore une parabole sauf pour $d = 0$.

À faire : expliquer qu'on est en train d'étirer un 1/2 plan pour recoller les bords et obtenir un plan.

Exercice 3. *Parmi les fonctions suivantes lesquels sont holomorphes ?*
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x + 1 \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y^3 - 3x^2 y \\ x^3 - 3xy + 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e^y \cos x \\ e^y \sin x \end{bmatrix}$

Exercice 4. *Donnez les fonctions holomorphes dont la première coordonnée est*

- $u(x, y) = 3xy^2 + x^3$,
- $u(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$,
- $u(x, y) = \cos x \cosh y$,
- $u(x, y) = 2x(c - y)$.

2 Écriture complexe d'une fonction holomorphe

2.1 Rappel sur les nombres complexes

On se placera sur $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire habituel et d'une orientation. Ce plan s'identifie à $\mathbb{C}$ via la bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \mapsto & z = x + iy \end{array}$$

Une autre construction des nombres complexes est possible en considérant les simitudes du plan :

$$Sim = \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Muni de l'addition et de la multiplication des matrices, Sim est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$ via $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto a + ib$.

Ces deux identifications sont compatibles : si A est une matrice de similitude l'application $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ se réécrit *via* la première identification $z \mapsto \alpha z$ où α est le nombre complexe correspondant à la simitude A.

Notations.

- *$x = \Re z$ la partie réelle de z,*
- *$y = \Im z$ la partie imaginaire de z,*
- *$\overline{z} = x - iy$ le conjugué de z,*
- *$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ le module de z,*
- *$\arg(z) \in \mathbb{R}$ tel que $x = |z| \cos(\arg z)$ et $y = |z| \sin(\arg z)$ est un argument de z.*

2.2 Fonctions holomorphes (2)

On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ et U sera un ouvert de $\mathbb{C}$. On notera $\mathscr{O}(U)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur U.

Proposition. *Une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est holomophe si elle est dérivable sur U i.e. si pour tout $z \in U$ la limite*

$$\lim_{\substack{h \in \mathbb{C}^* \\ h \to 0}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}.$$

Dans ce cas elle est noté $f'(z)$.

Remarque 1. *La conjugaison complexe n'est pas holomorphe (elle ne verifie pas les equations de Cauchy-Riemann) et on a bien $\lim \frac{\overline{h}}{h}$ n'existe pas.*

Preuve. – La limite existe si et seulement si $f(z+h) - f(z) - f'(z)h = o(|z|)$. Cette dernière égalité s'écrit avec les nombres réels :

$$f(x + \Re h, y + \Im h) - f(x,y) - \begin{bmatrix} \Re(f'(z)) & -\Im(f'(z)) \\ \Im(f'(z)) & \Re(f'(z)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Re h \\ \Im h \end{bmatrix} = o(|\Re h| + |\Im h|)$$

□

Conséquences : Si $f(z) = u(z) + iv(z)$ avec u et v à valeurs réelles,

- $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x}(z) = \frac{\partial v}{\partial y}(z) - i \frac{\partial u}{\partial y}(z)$,
- $|f'(z)|^2 = \det Df_z = \frac{\partial u}{\partial x}(z) \frac{\partial v}{\partial y}(z) - \frac{\partial u}{\partial y}(z) \frac{\partial v}{\partial x}(z)$

Exercice 5. *L'application $z \to |z|$ est-elle holomorphe ?*

Exercice 6. *Reprenez les fonctions des exercices précédents et écrivez-les en fonction de z et $\overline{z}$. Retrouvez les fonctions holomorphes.*

Exercice 7. *Dessinez la transformation de $\mathbb{C}^*$ donnée par $z \mapsto \frac{1}{z}$.*

Exercice 8. *Soient U un ouvert connexe et $f \in \mathscr{O}(U)$. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est constante,*
- *$\Re f$ est constante,*
- *$\Im f$ est constante,*

– $|f|$ *est constante,*
– $\overline{f} \in \mathscr{O}(U)$.

Exercice 9. *Montrez que si* $f \in \mathscr{O}(U)$ *alors* $\overline{f}$ *définie par* $\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})}$ *est holomorphe. Quel est son domaine de définition ?*

Proposition. *Soient* f *et* g *deux fonctions holomorphes sur* U*. On a*
– $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2, \lambda f + \mu g \in \mathscr{O}(U)$,
– $fg \in \mathscr{O}(U)$,
– *Si* f *ne s'annule pas sur* U, $\frac{1}{f} \in \mathscr{O}(U)$.

Preuve. – ... □

Conséquences : Puisque la fonction constante $z \mapsto 1$ ainsi que l'application identité $z \mapsto z$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$:
– les fonctions polynomiales sont holomorphes sur $\mathbb{C}$,
– une fonction rationnelle est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{a_1, \dots a_n\}$ où les a_i sont les racines du dénominateur.

Exercice 10. *Montrez que les dérivées des fonctions polynomiales et rationnelles sont données par les formules usuelles.*

Exercice 11. *Soit* $P \in \mathbb{C}[X, Y]$*. Montrez que* $z \mapsto P(z, \overline{z})$ *est holomorphe si et seulement si* $P \in \mathbb{C}[X]$.

Proposition. *Soient* f *une fonction holomorphe sur* U *et* g *une fonction holomorphe sur* V.
– *Si* f *est bijective de* U *sur* $f(U)$ *alors* $f^{-1} \in \mathscr{O}(f(U))$.
– *Si* $f(U) \subset V$ *alors* $g \circ f \in \mathscr{O}(U)$.

Preuve. – ... □

Exemple. *Étude de* $z \to \sqrt{z}$ *pour différent choix du domaine de définition.*

2.3 L'application du plan $z \mapsto \frac{1}{2}(z + z^{-1})$

Description géométrique de cette application.

3 Séries entières ; Séries de Laurent

3.1 Rappel sur les séries entières

Théorème. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Z^n$ *une série entière à coefficients complexes. Il existe un unique nombre* $R \in [0, +\infty]$ *tel que :*
– $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1/R$,
– $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1/R$,
– $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ *converge normalement si* $|z| < R$*, et diverge si* $|z| > R$.

Preuve. – Cette preuve se trouve presque partout ... □

3.2 Fonction holomorphe définie par une série entiere

Proposition. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Z^n$ *une série entière de rayon de convergence* R*. Sa somme définie une fonction holomorphe :*

$$\begin{array}{ccc} D(0,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \end{array}$$

Preuve. – La convergence normale implique la convergence uniforme de toute les séries dérivées sur $D(0, R - \epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$. Les théorèmes usuels (ou plutôt la réécriture de leurs preuves dans le cadre complexe) montre que lq somme est dérivable de dérivée la série dériv'ee. □

L'exemple le plus célèbre et le plus utile est l'exponentielle exp : $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 12. *Montrez que*
– $\exp' = \exp$,
– $\exp(z + w) = \exp(z)\exp(w)$,
– $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$,
– $\exp(z) = 1$ *si et seulement si* $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

Le deuxième exemple est le logarithme défini pour $z \in D(1, 1)$ par $\ln(z) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$.

Exercice 13. *On note* ln *la fonction holomorphe sur* $D(1, 1)$ *donnée par la somme de la série du logarithme.*

- *Déterminez* $U = \{z \mid \frac{1+iz}{1-iz} \in D(1,1)\}$.
- *Montrez que* arctan *est définie sur* U.
- *Montrez que* $\arctan(z) = \ln(\frac{1+iz}{1-iz})$ *pour* $z \in U$

Exercice 14. – *Donnez le developpement en série entière de* $f(z) = \frac{1}{z}$ *en* $a \in \mathbb{C}^*$.
- *En déduire le développement d'une primitive de* f *sur un disque centré en* a.
- *Montrez que* ln *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathbb{C}-]-\infty, 0]$ *que l'on note encore* ln.
- *Montrez que* $\exp \circ \ln(z) = z$ *et que* $\ln \circ \exp(z) = z$ *lorsque tous les termes sont bien définis.*
- *Donner les parties réelles et imaginaires de* $\ln(z)$.

Est-il vrai que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exercice 15. *Calculez* $\cos i$, $\sin i$, $\tan(1+i)$

Exercice 16. *Donnez les parties réelles et imaginaires de* $\sin(z)$ *et* $\cos(z)$

Exercice 17. *Montrez que* $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+2)}$ *est développable en série entière sur un disque centré en* 0 *et donnez le rayon de convergence.*

Exercice 18. *Donnez les rayon de convergence des séries suivantes :*

$$\sum n^p z^n, \quad \sum n! z^n, \quad \sum q^{n^2} z^n, \quad \sum \frac{1+(-1)^n}{2^n} z^{2n}$$

3.3 Les applications du plan exp et ln

Description géométrique de ces applications.

3.4 Série de Laurent

Une série de Laurent est une série à coefficients complexes de la forme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n Z^n$.

Proposition. *Soit* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n Z^n$ *une série de Laurent telle que*
- *le rayon de convergence de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Z^n$ *est* R,
- *le rayon de convergence de* $\sum_{n\geq 1} a_{-n} W^n$ *est* $1/r$

Sa somme définie une fonction holomorphe :

$$\begin{array}{rcl} C(0,r,R) & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n} \end{array}$$

où $C(0,r,R)$ *est la couronne* $\{z \in \mathbb{C} | r < |z| < R\}$.

Exercice 19. *Calculez les sommes de*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{|n|!}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^n}{(2+\frac{n}{|n|})^n}.$$

Exercice 20. *Montrer que* $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)(2+z^2)}$ *est la somme d'une série de Laurent sur la couronne* $C(0,1,\sqrt{2})$.

3.5 Remarque importante

Tous les exemples de fonctions $f : U \to \mathbb{C}$ holomorphes données jusqu'à maintenant sont analytiques :

$$\forall z_0 \in U \ \exists \eta > 0 \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n Z^n \text{ tels que } |z - z_0| < \eta \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Question : Est ce toujours le cas ?

Exercice 21. *Sauriez-vous montrer que les sommes de séries de Laurent sont analytiques.*

4 Intégrales et primitives

4.1 Intégrale sur un chemin orienté

Définition. *Un chemin allant de* $z_0 \in U$ *à* $z_1 \in U$ *est un arc paramétré* $\mathscr{C}^1$ *par morceaux* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *tel que* $\gamma(a) = z_0$ *et* $\gamma(b) = z_1$.

Exemples.

- *Le segment joignant z_0 à z_1 est donné par* $\left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & z_0 + t(z_1 - z_0) \end{array}\right.$.
- *Le cercle parcouru k fois ($k \in \mathbb{Z}$) est donné par* $\epsilon_k : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & exp(2i\pi kt) \end{array}\right.$.

Définition. *Si $f : U \to \mathbb{C}$ est continue et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin alors*

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt, \\
\int_\gamma f(z)d\overline{z} &= \int_a^b f \circ \gamma(t)\overline{\gamma'(t)}dt, \\
\int_\gamma f(z)|dz| &= \int_a^b f \circ \gamma(t)|\gamma'(t)|dt.
\end{aligned}$$

Remarque 2. *L'intégrale $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ ne dépend pas de la paramétrisation mais seulement de $\gamma([a,b])$ et de l'orientation du chemin. En effet si $\varphi : [a',b'] \to [a,b]$ on a $\int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt = \int_{a'}^{b'} f \circ (\gamma \circ \varphi(s))(\gamma' \circ \varphi(s)\varphi'(s)ds$.*

Exercice 22. *Calculer les intégrales suivantes*
- $\displaystyle\int_{\epsilon_k} z^n dz$ *pour $n \in \mathbb{Z}$*
- $\displaystyle\int_{\partial R} z^n dz$ *où R est le carée de sommets $1-i, 1+i, \ldots$ et son bord est orienté positivement.*

Exercice 23. *Montrez que $\int_{C(0,r)} \frac{|dz|}{|z|} < 8$.*

Exercice 24. *Montrez que pour n et m deux entiers positifs, $m \geq 1$, et $R > 1$ on a*

$$\int_{C(0,R)} \frac{z^n}{z^m - 1} < \frac{2\pi R^n}{R^m - 1}$$

4.2 Intégrale d'une fonction holomorphe

Théorème (Goursat)**.** *Soient $f \in \mathscr{O}(U)$ et $R \subset U$ un rectangle. On a*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

Preuve. – En coupant le rectangle en quatre rectangles semblables, on découpe l'intégrale

$$\int_{\partial R} = \int_{\partial R'} + \int_{\partial R''} + \int_{\partial R'''} + \int_{\partial R''''}.$$

Notons R_1 un rectangle tel que $|\int_{\partial R_1}|$ soit le plus grand des quatres. On a alors

$$\left|\int_{\partial R}\right| \leq 4\left|\int_{\partial R_1}\right|.$$

En itérant cette construction on obtient une suite de rectangle emboîtés $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\left|\int_{\partial R}\right| \leq 4^n\left|\int_{\partial R_n}\right|..$$

Si L est le périmètre de R_0 et D est son diamètre, ceux de R_n sont respectivement $2^{-n}L$ et $2^{-n}D$.

La complétude de $\mathbb{C}$ donne l'existence d'un complexe w tel que $\cap R_n = \{w\}$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N$ on ait pour tout $z \in R_n$

$$|f(z) - f(w) - f'(w)(z-w)| < \epsilon|z-w|.$$

Ainsi $\left|\int_{\partial R_n}(f(z) - f(w) - f'(w)(z-w))dz\right| \leq \epsilon\int_{\partial R_n}|z-w||dz| \leq \epsilon 4^{-n}LD$.

D'un autre coté

$$\int_{\partial R_n}(f(z) - f(w) - f'(w)(z-w))dz = \int_{\partial R_n} f(z)dz - (f(w) - f'(w)w)\int_{\partial R_n} dz - f'(w)\int_{\partial R_n} zdz = \int_{\partial R_n} f(z)dz.$$

Nous avons donc prouvé que pour tout $\epsilon > 0$, $\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| \leq \epsilon$. Ceci prouve le théorème. □

Exercice 25. *Montrez que* $\int_{-\infty}^{+\infty} exp\big(-(t+i\alpha)^2\big)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} exp(-t^2)dt$.

4.3 Primitives

Définition. *Soit* $f : U \to \mathbb{C}$ *une fonction. Une primitive de* f *est une fonction holomorphe* $F : U \to \mathbb{C}$ *telle que* $F' = f$.

Proposition. *Soit* $f \in \mathscr{O}(U)$. *Si* f *admet une primitive alors* $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *pour tout lacet.*

Preuve. – Si $F' = f$ s'écrit $F(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ et $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ alors $(F \circ \gamma)' = \frac{\partial u}{\partial x}x' + \frac{\partial u}{\partial y}y' + i\frac{\partial v}{\partial x}x' + i\frac{\partial v}{\partial y}y'$. Compte tenu des équations de Cauchy Riemann on a $(F \circ \gamma)' = F' \circ \gamma(t)(x'(t) + iy'(t))$ ce qui donne $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f \circ \gamma(t)\gamma'(t)dt = F(b) - F(a)$. Si le chemin est fermé, la proposition est démontrée. □

Définition. *Un ouvert* U *de* $\mathbb{C}$ *est dit quadrillable si il existe* $z_0 \in U$ *tel que pour tout* $z \in U$ *le rectangle de sommets* z_0 *et* z *et de cotés parallèles aux axes réels et imaginaires soit inclus dans* U

Un rectangle est quadrillable, un disque est quadrillable, ...

Théorème. *Si* U *est quadrillable alors tout* $f \in \mathscr{O}(U)$ *admet une primitive.*

Preuve. – Choisissons un z_0 comme point base du quadrillage de U. Pour $z \in U$ on note R_z le rectangle donné par la définition, γ_z^+ le chemin joignant z_0 à z en suivant le bord supérieur du rectangle et γ_z^- le chemin suivant l'autre bord. On définit $F(z) = \int_{\gamma_z^+} f(\zeta)d\zeta$. Le théorème fondamentale de l'analyse donne $\frac{\partial F}{\partial x} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{1}{h}(F(z+h) - F(z)) = \lim \frac{1}{h}\int_0^h f(z+t)dt = f(z)$ et $\frac{\partial F}{\partial y} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}^*}} \frac{1}{h}(F(z+ih) - F(z) = \lim \frac{1}{h}\int_0^h f(z+it)idt = if(z)$. Ceci donne les équations de Cauchy-Riemann pour F. □

On a alors la réciproque de la proposition précédente.

Proposition. *Soit* $f \in \mathscr{O}(U)$. *Si* $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *pour tout lacet alors* f *admet une primitive.*

Preuve. – On définit F en intégrant f sur un chemin quelconque joignant un point fixé z_0 à z. L'additivité de l'intégrale permet de ramener le calcule des dérivées partielles de F au cas local, c'est-à-dire au théorème ci-dessus. □

Exemple. *Reprendre* $\frac{1}{z}$.

5 Formule intégrale de Cauchy

Cette formule est basée sur le raffinement suivant du théorème de Goursat

Théorème. *Soient* $R \subset U$ *un rectangle et* $w \in int(R)$. *Si* $f \in \mathscr{O}(U - \{w\})$ *vérifie* $\lim\limits_{z\to w}(z-w)f(z) = 0$ *alors*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

Preuve. – En découpant R on peut le remplacer par un rectangle de diamètre aussi petit que l'on veut. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir un rectangle de diamêtre assez petit pour que $|z-w||f(z)| < \epsilon$. On a donc

$$\left|\int_{\partial R} f(z)dz\right| < \epsilon \int_{\partial R} \frac{|dz|}{|z-w|}$$

On a $\int_{\partial R} \frac{|dz|}{|z-w|} < 8$ ce qui prouve le théorème. □

En appliquant le théorème précedent à la fonction $G(z) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ on obtient

Théorème (Cauchy)**.** *Soient* $R \subset U$ *un rectangle et* $w \in int(R)$. *Si* $f \in \mathscr{O}(U)$ *alors pour tout* w *a l'intérieur du rectangle*

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial R} \frac{f(z)dz}{z-w}$$

Remarque 3. *Habituellement on écrit cette formule en intégrant sur un cercle ce qui ne change rien : si* $f \in \mathscr{O}(U)$ *et* $\overline{D(z_0,r)} \subset U$ *alors pour tout* $w \in D(z_0,r)$

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)dz}{z-w}$$

6 Conséquences de la formule de Cauchy

6.1 Rappel sur les suites de fonctions

Théorème. *Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur γ qui converge uniformement vers f alors* $\lim \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$.

Corollaire. *Soient X un compact de $\mathbb{R}^n$, λ la mesure de Lebesgue et $f : U \times X \to \mathbb{C}$ continue tels que*
- *$\forall x \in X$, $z \mapsto f(z,x)$ soit différentiable sur U.*

Alors $F(z) = \int_X f(z,x)d\lambda(x)$ est différentiable sur U et $DF_z = \int_X \frac{\partial F}{\partial z}(z,x)d\lambda(x)$.

6.2 Conséquences

Nous pouvons maintenant répondre à la question posée à la fin du troisième chapitre.

Théorème. *Une fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(U)$ est analytique et pour $w \in D(z_0,z) \subset\subset U$*

$$f^{(n)}(w) = \frac{n!}{2i\pi}\int_{C(z_0,r)} \frac{f(z)dz}{(z-w)^{n+1}}$$

Preuve. – Dans la formule de Cauchy on écrit que $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-z_0}\left(\sum\left(\frac{w-z_0}{z-z_0}\right)^n\right)$. f étant bornée sur le disque, la convergence de la série est normale et on peux intégrer terme à terme. □

Et on peut même dire un peux plus

Théorème. *Une fonction holomorphe sur une couronne est une somme d'une série de Laurent.*

Preuve. – Soit $f : C(0,r,R) \to \mathbb{C}$ holomorphe. On a pour $w \in C(0,r,R)$,

$$f(w) = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,\frac{|w|+R}{2})} \frac{f(z)dz}{z-w} - \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,\frac{|w|+r}{2})} \frac{f(z)dz}{z-w}.$$

Le développement de la première intégrale en 0 donne les puissance positives de la série de Laurent. En considérant la seconde comme une fonction de $\zeta = 1/w$ holomorphe sur $D(0,1/r)$, on voit que son développement donne les puissance négatives de la série. □

Proposition (Estimée de Cauchy)**.** *Soient $f \in \mathscr{O}(U)$ et $z \in U$. Il existe deux constantes $M > 0$ et $R > 0$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq M\frac{n!}{R^n}.$$

Exercice 26. *Montrez les estimations ci-dessus.*

Remarque 4. *La constante M dépend a priori de R mais pas de n. En particulier si on peux choisir M indépendamment de R, on obtient le théorème de Liouville.*

Théorème (Liouville)**.** *Une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et bornée est constante.*

Preuve. – Appliquez les estimées de Cauchy à la dérivée et faure tendre R vers $+\infty$. □

Théorème (fondamental de l'algèbre)**.** *Une fonction polynomiale $P \in \mathbb{C}[z]$ non constante a un zéro complexe.*

Preuve. – Si $P(z) = az^d + \ldots$ avec $d \geq 1$ et $a \neq 0$ alors pour $|z|$ assez grand $|P(z)| > \frac{a}{2}|z|^d$ ($P(z) = az^d(1+\ldots)$ les petits points tendent vers 0 donc sont plus grand que $-1/2$ pour $|z|$ assez grand). Maintenant si P n'a pas de zéro, $\frac{1}{P}$ est holomoprhe sur $\mathbb{C}$ et son module tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$, il est donc bornée ce qui contredit le théorème de Liouville. □

Autrement dit si $P \in \mathbb{C}[Z]$ de degré d alors il existe $a_0, a_1, \ldots a_d$ des nombres complexes telles que $P(Z) = a_0(Z - a_1)\ldots(Z - a_d)$

Théorème (Principe du maximum)**.** *Soient U un ouvert connexe et $f \in \mathscr{O}(U)$. Si il existe $w \in U$ tel que $|f(w)| = \sup\{|f(z)|, z \in U\}$ alors f est constante.*

Preuve. – Supposons que $|f|$ ait un maximum local en 0 et appliquons la formule de Cauchy sur un petit cercle autour de 0 :

$$f(0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(0,r)} \frac{f(z)}{z} dz.$$

L'inegalité triangulaire et la paramétrisation usuelle du cercle donne

$$|f(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Le théorème de la moyenne contredit l'hypothèse de maximalité de $|f(0)|$ sauf si f est localement constante. □

Théorème. *Soient $f \in \mathscr{O}(U)$ et $w \in U$. Sont équivalentes*
- $f = 0$,
- *l'ensemble* $\{z \mid f(z) = 0\}$ *s'accumule sur* w,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(w) = 0$.

Preuve. – C'est évident sauf pour le second point. Si une dérivée est non nulle en w alors $f(z) = (z - w)^n h(z)$ avec $h(w)$ non nul. Par continuité h est non nulle au voisinage de w. il n'y a pas d'autre zero que w au voisinage de w. □

Exercice 27. *Déterminez toutes les fonctions f holomorphes sur le disque unité telles que*

$$f(1/n) = 1/n^2; \quad f(1/n) = \cos(n\pi/2)/n; \quad f(1/n) = e^{-n}.$$

Dans chaques cas, donnez une fonction holomorphe sur $C(0, 0, 1)$ différente celle que vous venez de donner et vérifiant les mêmes interpolations.

Théorème. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction holomorphe sur U convergeant uniformément sur tout compact de U vers une fonction $f : U \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformement sur tout compact vers $f^{(k)}$.*

Preuve. – Les théorèmes usuels montrent que la limite vérifie aussi la formule de Cauchy. Celui de dérivation sous le signe somme donne l'holomorphie de f. □

Ce théorème doit être comparé a ceux que vous connaissez concernant les fonction d'une variable réelle.

Théorème. *Soient X un ouvert de $\mathbb{R}^n$, λ la mesure de Lebesgue et $f : U \times X \to \mathbb{C}$ tels que*
- $\forall x \in X$, $z \mapsto f(z, x)$ *est holomorphe,*
- $\forall z \in U$, $x \mapsto f(z, x)$ *est intégrable.*
- *pour tout compact $K \subset U$ il existe $g_K : X \to \mathbb{R}$ intégrable telle que $\forall (z, x) \in K \times X, \quad |f(z, x)| \leq g_k(x)$.*

Alors $F(z) = \int_X f(z, x) d\lambda(x)$ est holomorphe sur U
et $\forall n \in \mathbb{N}$ $F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z, x) d\lambda(x)$.

7 Singularité et résidus

Définition. *Soient $z_0 \in U$ et $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On dit que*
- *z_0 est ordinaire si $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n$ avec $a_0 \neq 0$,*
- *z_0 est un zéro d'ordre $k \in \mathbb{N}_{>0}$ de f si $f(z) = \sum_{n\geq k} a_n(z - z_0)^n$,*
- *z_0 est un pôle d'ordre $k \in \mathbb{N}_{>0}$ de f si $f(z) = \sum_{n\geq -k} a_n(z - z_0)^n$,*
- *z_0 est une singularité esssentielle sinon.*

Définition. *Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre complexe dans U sans point d'accumulations dans U. Une fonction holomorphe f sur $U - \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}})$ est dite méromorphe sur U si les z_i sont des pôles.*

Définition. *Soient $z_0 \in U$ et $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Dans une couronne on a $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z - z_0)^n$. Le résidu de f en z_0 est $Res_{z_0}(f) = a_{-1}$.*

Théorème (des résidus (1))**.** *Soient $z_0 \in U$, $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$ et $f : U - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Alors*

$$\int_{C(z_0,r)} f(z) dz = 2i\pi Res_{z_0}(f).$$

Le résidu de f en z_0 peut se calculer facilement :
z_0 **est un pôle simple.** Ecrire $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ avec $u(z_0) \neq 0$ et $v(z_0) = 0$: $Res_{z_0}(f) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$.
z_0 **est un pôle multiple.** Ecrire $f(z) = \frac{u(z)}{(z-z_0)^k}$: $Res_{z_0}(f) = \frac{1}{k!} u^(k)(z_0)$.

Si cette dernière écriture ne s'obtient pas facilement, écrire $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ et faire la division euclidienne suivant les puissances croissantes.

Exercice 28. *Considérons la série* $\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}$.
- *Si* $R > 0$ *et* $N > 2R$ *montrez que* $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}$ *converge normalement sur le disque* $D(0, R)$.
- *Déduisez-en que* f *est méromorphe sur* $\mathbb{C}$.
- *Donnez ces résidus.*

Exercice 29. *Soient* $f \in \mathscr{O}(U)$, $z_0 \in U$ *et* $r >$ *tel que* $D(z_0, r) \subset U$.
- *Montrez que* $z \mapsto \frac{1}{f(z) - f(z_0)}$ *est méromophe.*
- *Montrez que* $\int_{C(z_0,r)} \frac{1}{f(z) - f(z_0)} dz = \frac{2i\pi}{f'(z_0)}$.

Exercice 30. *Si* Q *est un polynôme dont les racines distinctes sont* $a_1, \dots a_n$ *et* P *un polynôme de degré inférieur à* $n - 1$ *alors*

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(a_i)}{Q'(a_i)(z - a_i)}.$$

Si $z_0 \in \mathbb{C}$ *et* $R > 0$ *tels que pour tout* i, $R \neq |z_0 - a_i|$, *calculer*

$$\int_{C(z_0,R)} \frac{P(z)}{Q(z)} dz.$$

8 Indices et résidus

8.1 Indice d'un lacet

Définition. *Un lacet est une chemin* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *qui se ferme :* $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition. *L'indice de* $z_0 \in \mathbb{C} - \gamma([a, b])$ *par rapport à un lacet* γ *est*

$$Ind_\gamma(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$$

Proposition. *Le nombre* $Ind_\gamma(z_0)$ *est un entier.*

Preuve. – Considérons la fonction $F(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)ds}{\gamma(s) - z_0}$. En dérivant $e^{-F(t)}(\gamma(t) - z_0)$ on obtient l'existence d'une constante telle que $\gamma(t) - z_0 = Ce^{-F(t)}$. Ainsi $e^{F(a)} = e^{F(b)}$. L'exercice sur la fonction exponentielle permet de conclure. $\square$

Proposition. *Si* z_0 *et* z_1 *sont reliés par un chemin de rencontrant pas* γ *alors* $Ind_\gamma(z_0) = Ind_\gamma(z_1)$.

Preuve. – Ce n'est qu'une application de la continuite d'une intégrale à paramètres joint au fait qu'une fonction continue à valeurs entières est localement constante. $\square$

Interprétation heuristique : $Ind_\gamma(z_0)$ est le nombre de tours que fait γ autour de z_0.

Théorème (des résidus (2))**.** *Soient* U *un ouvert simplement connexe,* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombre complexe de* U *sans point d'accumulations dans* U, f *une fonction holomorphe sur* $U - \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *et* γ *un lacet dans* $U - \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Alors*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k Ind_\gamma(z_i) Res_{z_i}(f).$$

8.2 Méthodes de calculs

Le théroème des résidus peut être utilisé tel quel ou jointe à quelques estimées pour calculer certain types d'intégrales.

8.2.1 Calculs d'intégrales (1)

Calcul des intégrales suivantes :
- $\displaystyle\int_{C(0,2)} \frac{3z + 1}{z(z - 1)^3 dz} = 0$
- $\displaystyle\int_{C(0,1)} z \exp(1/z) dz = i\pi$
- $\displaystyle\int_{C(0,1)} \cot(z) dz = 2i\pi$
- $\displaystyle\int_{C(ia/2, 3|a|/4)} \frac{1}{z^2 + a^2} dz = \frac{\pi}{a}$

8.2.2 Calculs d'intégrales (2)

Calculons une intégrale du type $\int_0^{2\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ avec Q rationnelle.

En posant $z = \exp i\theta$ et $f(z) = \frac{1}{iz}Q(\frac{1}{2}(z+z^{-1}), \frac{1}{2i}(z-z^{-1}))$ on obtient

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos\theta, \sin\theta)d\theta = \int_{C(0,1)} f(z)dz = 2\pi i \sum_{|z_i)|<1} Res_{z_i}(f).$$

Exemple. *Calculez* $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+\sin\theta}d\theta.$

8.2.3 Calculs d'intégrales impropres (1)

Proposition. *Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini de pôle et aucun sur l'axe réel. Si il existe $A > 0$ tel que $|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^2}$ pour $|z|$ suffisamment grand alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{\Re(z_i)>0} Res_{z_i}(f) = -2\pi i \sum_{\Re(z_i)<0} Res_{z_i}(f).$$

Preuve. – La majoration permet de montrer que l'intégrale est convergente. Soit $R > 0$. Appliquons le théo˚eme des résidus sur le chemin formé du segment $[-R, R]$ et du demi cercle de centre 0 et de rayon R. Lorsque R tend vers $+\infty$ l'intégrale sur le segment tend vers celle que l'on veut calculer. Une majoration brutale de la seconde partie de l'intégrale montre que cette dernière tend vers 0. □

Exemple. *Calculez* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^6+1}dx$

Un cas particulier ressemble à la formule de Cauchy.

Soient $\epsilon < 0$, f une fonction holomorphe sur $U = \{z|\Im z > \epsilon\}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Im z > 0$. Supposons qu'il existe $B > 0$ et $c > 0$ tel que $|f(z)| < \frac{B}{|z|^c}$ sur le demi-plan supérieur. On a

$$2\pi i f(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}dt.$$

Exemple. *Calculez* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx$

8.2.4 Calculs d'intégrales impropres (2)

Lorsque f n'est pas définie sur tout l'axe réel, il faut utiliser de petit cercles.

Exemple. *Calculez* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \pi/2$

Exemple. *Calculez* $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx$

Exemple. *Calculez* $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ *et* $\int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2+1}dx$

Certaines fois des fonctions annexes peuvent être utiles

Exercice 31. *Soit $a = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}$. En intégrant*

$$f(z) = \frac{\exp(-z^2)}{1+\exp(-2az)}$$

sur le parallélogramme de sommets $-R$, $-R+a$, $R+a$ et R, calculez

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

(Indication : remarquez que $f(z) - f(z+a) = exp(-z^2)$.)

9 Transformations

9.1 Séries de Fourier

Le théorème de développement en séries de Laurent d'une fonction holomorphe sur une couronne est un cas particulier du développement en série de Fourier.

La fonction $z \mapsto \exp(2i\pi z)$ se restreint en une application de la bande $D = \{z \mid a < \Im z < b\}$ sur la couronne $C = \{w \mid e^{-2\pi b} < |w| < e^{-2\pi a}\}$. Pour $w = e^{2i\pi z}$ on peut définir $g(w) = f(z)$. Si f est holomorphe sur D, g est holomorphe sur C. On a alors que $g(w) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n$.

Théorème. *Si $f \in \mathscr{O}(D)$ est 1-périodique alors $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{2i\pi n z}$. La série converge normalement sur tout compact de D.*

Exercice 32. *Montrez ce théorème.*

Remarque 5. *Comparez ce théorème avec celui donnant l'existence d'un représentation par série de Fourier d'une fonction périodique.*

Remarquons que si l'axe réel est dans la bande, 'on obtient a_n comme résidu en 0 de $g(w)w^{-n-1}$ ainsi

$$a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_{C(0,1)} g(w)w^{-n-1}dw = \int_0^1 f(z)e^{-2i\pi n t}dt.$$

Exercice 33. *La fonction $z \mapsto \cot(\pi z)$ est 1-périodique et holomorphe sur $D_+ = \{z | 0 < \Im z\}$ et $D_- = \{z | \Im z < 0\}$. Déterminez les deux représentations de Fourier correspondantes.*

En traitement du signal et en automatique la transformation qui à une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la série de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \frac{1}{z^n}$ s'appelle la transformée en z.

9.2 Transformée de Fourier

Définition. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$. Sa transformée de Fourier est*

$$\widehat{f}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ipx}dx.$$

Théorème. *Soit f une fonction méromophe sur $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini de pôles et aucun sur l'axe réel. Si il existe $K > 0$ tel que $|f(z)| < \frac{k}{|z|}$ pour $|z|$ assez grand alors pour $p \geq 0$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ipx}dx = 2i\pi \sum_{\Im w > 0} Res_w(e^{ipz}f(z))$$

Preuve. –

□

Exercice 34. *Calculez la transformée de Fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 35. *Calculez la transformée de Fourier de $x \to e^{-x^2}$*

9.3 Transformée de Laplace

Définition. *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Sa transformée de laplace est*

$$\mathcal{L}f(p) = \int_0^{+\infty} f(x)e^{-px}dx$$

si elle existe.

Théorème. *Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Si il existe $M > 0$ et $\sigma \in \mathbb{R}$ tels que $|f(x)| < Me^{\sigma x}$ alors $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur $\{z \| \Re(z) > \sigma\}$.*

Preuve. –

□

Théorème. *Soit g une fonction holomorphe sur $\{z \mid \Re(z) > \sigma\}$ et $r > \sigma$. Si*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{r+i\mathbb{R}} e^{pt} g(p) dp$$

existe pour $t \in [0, +\infty[$ alors $\mathcal{L}f = g$.

Preuve. –

□

9.4 Transformée de Mellin

Définition. *Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, dx)$. Sa transformée de Mellin est*

$$\mathcal{M}f(a) = \int_0^{+\infty} f(x) x^a \frac{dx}{x}.$$

Définition. *Pour $a \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C} - [0, +\infty[$ on definit*
- *un logarithme de z par $\ln(z) = \ln|z| + i\theta$, $\theta \in]0, 2\pi[$,*
- *z^a par $\exp(a \ln z)$.*

Théorème. *Si $a \in \mathbb{R}_{>0} - \mathbb{N}$, f est une fonction méromophe sur $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini de pôles et aucun sur $[0, +\infty[$ et si il existe*
- *$b > a$, $K > 0$ tels que $|f(z)| < \frac{K}{|z|}$ pour $|z|$ assez grand,*
- *$0 < b' < a$, $K' > 0$ tels que $|f(z)| < \frac{K'}{|z|}$ pour $|z|$ assez petit,*

alors

$$\int_0^{+\infty} f(x) x^a \frac{dx}{x} = -\frac{\pi e^{-\pi i a}}{\sin \pi a} \sum_{w \neq 0} Res_w(z^a f(z))$$

Preuve. –

□

Exercice 36. *Calculez la transformée de Mellin de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$.*

Exercice 37. *Soit Γ la fonction définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^z \frac{dx}{x}.$$

1. *Montrez que Γ est définie sur $\Omega = \{z \mid \Re z > 0\}$.*
2. *Montrez que la suite f_n définie par $f_n(z) = \int_{1/n}^{n} e^{-x} x^z \frac{dx}{x}$ converge uniformément sur tout compact vers Γ. Déduisez-en que Γ est holomorphe.*
3. *Montrez que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. Pour $n \in \mathbb{N}$ calculez $\Gamma(n)$.*
4. *Prolongez Γ en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Déterminez les résidus de Γ en $-n$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$.*