UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master 2 / PRM3 - Écrits blancs CAPES — Automne 2011

## 1. Convexité

**Exercice 1.1.** Donner la définition d'une fonction convexe et la caractérisation des fonctions dérivables convexes en terme de la variation de leurs dérivées.

**Exercice 1.2.** Montrer que le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ces tangentes.

**Exercice 1.3.** Montrer que le graphe d'une fonction convexe est en-dessous de ces cordes.

**Exercice 1.4.** Montrer que
- $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\ln(1 + x) \leq x$ pour tout $x \in ]-1, +\infty[$,
- $\frac{2}{\pi} \leq \sin x \leq x$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,
- $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ pour tout $x \in [-1, +\infty]$.

## 2. "Puissances comparées"

**Exercice 2.1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{n^k}{n!}$. Étudier les variations de la suite et en déduire un rang $n_0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ lorsque $n \geq n_0$. Montrer ensuite que $(u_n)$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 2.2.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{n^k}{a^n}$ avec $a > 1$. Étudier les variations de la suite et en déduire un rang $n_0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{\sqrt{a}}$ lorsque $n \geq n_0$. Montrer ensuite que $(u_n)$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 2.3.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. Étudiez les variations de la suite et déduisez-en un rang $n_0$ tel que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ lorsque $n \geq n_0$. Montrez ensuite que $u_n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

## 3. Séries numériques

**Exercice 3.1.** Calculer les sommes des séries de terme général $u_n$ :

$$\textbf{a)}\ u_n = \frac{1}{n(n+2)}, \quad \textbf{b)}\ u_n = \frac{1}{4n^2-1}, \quad \textbf{c)}\ u_n = \ln\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}, \quad \textbf{d)}\ u_n = \frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{2^n}.$$

**Exercice 3.2.** *Écriture décimale d'un nombre rationnel*
Soit le nombre $A = 3,21212121\ldots$ dans le système décimal. Une écriture équivalente de $A$ est :

$$A = 3 + \frac{21}{100} + \frac{21}{100^2} + \frac{21}{100^3} + \ldots$$

**a)** Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{21}{100^n}$.

**b)** En déduire l'écriture de $A$ sous forme de fraction irréductible.

**Exercice 3.3.** Étudier la nature des séries de terme général $u_n$ :

**a)** $u_n = \dfrac{n^2}{n!}$, **b)** $u_n = \dfrac{10^n}{n!}$ **c)** $u_n = \dfrac{n-1}{n^4+n+1}$, **d)** $u_n = \sin\dfrac{1}{2^n}$,

**e)** $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$, **f)** $u_n = \dfrac{1}{n\ln n}$, **g)** $u_n = \dfrac{1}{n(n+\ln n)}$.

**Exercice 3.4.** Soit la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

On pose $d_n = u_n - u_{n-1}$. Montrer que $d_n \sim \frac{-1}{2n^2}$ et en déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

**Exercice 3.5.** Étudier les séries de terme général $u_n$ et préciser si elles convergent absolument :

**a)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, **b)** $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}\ln n$, **c)** $u_n = \sin\left((n+\dfrac{1}{n})\pi\right)$.

**Exercice 3.6.** Montrer que la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x dx$ est alternée. Exprimer $u_n$ en fonction de $u_0$ puis calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

## 4. Intégrales impropres

**Exercice 4.1.** Étudier la nature des intégrales impropres suivantes :

**a)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$, **b)** $\displaystyle\int_1^{+\infty} (x+1-\sqrt{x^2+2x+2})dx$

**c)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{2+e^x+e^{-x}}dx$, **d)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x}dx$.

**Exercice 4.2.** Montrer que l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente pour tout $x \in ]0,+\infty[$. Est-elle convergente pour $x = 0$ ?
Montrer ensuite que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, en déduire la valeur $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $\Gamma$ est dérivable et $\Gamma'(1) = -\gamma$.

**Exercice 4.3.** Déterminer les valeurs de $x$ et $y$ pour que l'intégrale $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ soit convergente. Montrer ensuite que $B(x,y) = B(y,x)$ et que $\binom{n+p}{p}B(n+1,p+1) = 1$ pour tout couple d'entiers $(n,p)$.