Feuille d'exercices 7

Exercice 1. Un centre médical prépare une campagne de vaccination contre la grippe. La personne responsable des stocks doit prévoir le nombre de vaccins à acheter en tenant compte des contraintes suivantes :
– 10000 personnes sont susceptibles de demander à être vaccinées.
– Les campagnes précédentes montrent qu'en fait chaque personne susceptible d'être vaccinée a une probabilité 1/2 de demander le vaccin.
– Le risque de rupture de stock doit être limité à $2,5\%$.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes demandant à être vaccinées.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. En utilisant le théorème central limite, montrer que $\mathbb{P}\{\frac{X-5000}{50} \leq 1,96\} \simeq 0,975$.
3. La personne responsable des stocks décide finalement d'acheter 5100 vaccins. A-t-elle respecté son cahier des charges ?

Exercice 2. Une compagnie d'assurance se propose d'assurer 100000 clients contre le vol. Les sommes en euros (la plupart du temps nulles) $X_1, \ldots, X_{100000}$ qu'aura à rembourser chaque année la compagnie aux clients sont des v.a. indépendantes d'espérance 75 et d'écart type 750. Quelle somme cette compagnie d'assurance doit-elle faire payer à chaque client par an pour que ses frais fixes, évalués à $1,5$ millions d'euros, soient couverts avec une probabilité supérieure ou égale à 0.999 ?

Exercice 3. Au RU, deux types de légumes sont proposés : haricots verts ou épinards. Les cinq cents clients quotidiens du RU choisissent indépendamment les uns des autres les haricots avec probabilité 0.5 et les épinards avec probabilité 0.5.
Pour être sûr d'avoir suffisamment de parts de chacun des légumes pour servir tous les clients, combien doit-on en prévoir ?
Pour éviter le gaspillage, on décide de prévoir assez de parts pour qu'il y ait moins d'une chance sur vingt que certains étudiants ne puissent pas choisir. On note S le nombre d'étudiants choisissant les épinards.
Décrire S comme une variable aléatoire et donner sa loi.
Déterminer N tel que $\mathbb{P}(S > N)$ soit inférieur à 0.05.

Exercice 4. Sur 429440 naissances, on a dénombré 221023 garçons. La proportion de garçons est-elle compatible avec l'hypothèse d'équiprobabilité des naissances de filles et de garçons au risque de 5%

Exercice 5. 20% des ampoules issues d'une certaine usine fonctionnent plus de 200 heures. Après un changement dans le processus de fabrication, on constate sur un échantillon de 100 ampoules que 30 fonctionne plus de 200 heures. L'amélioration apparente est-elle significative au seuil de 5% ?

Exercice 6. Le taux d'écoute d'un certain programme de télévision est de 15%. On change le présentateur ; une sondage effectué sur 80 personnes montre que 18 d'entre elles ont choisi de regarder ce programme. Peut-on dire que le changement de présentateur a influencé le public, au seuil de 5% ?

Exercice 7. On suppose que la durée de vie d'un composant électronique est une variable aléatoire X. Soit $(X_1,\dots,X_{30})$ l'échantillon aléatoire issue de X et $\overline{X}_{30}$ la moyenne empirique.
On a observé un échantillons de 30 composants électroniques, les durées de vie (en milliers d'heures) mesurées sont les suivantes :

0.1 ; 7.4 ; 1.0 ; 7.9 ; 2.1 ; 1.8 ; 17.9 ; 9.3 ; 6.5 ; 3.3 ; 5.6 ; 7.7 ; 0.1 ; 24.3 ; 8.1 ; 10.0 ; 11.9 ; 1.6 ; 2.7 ; 0.5 ; 5.6 ; 42.5 ; 5.2 ; 2.0 ; 0.2 ; 15.0 ; 3.5 ; 6.4 ; 0.6 ; 3.3

On admet que la somme de ces nombres est 223.5.

Première partie - On suppose dans cette partie que X qui suit une loi exponentielle de paramètre inconnu $\theta > 0$. On rappelle que la densité de cette loi est donnée par :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta}\exp(-\frac{x}{\theta}) \text{ pour } x \geq 0,\ 0 \text{ sinon}$$

1. Calculer l'espérance et la variance de X en fonction de θ.
2. Montrer que $\mathbb{P}(\overline{X}_{30} \in [\theta - \frac{1{,}96}{\sqrt{30}}\theta; \theta + \frac{1{,}96}{\sqrt{30}}\theta]) \approx 0.95$
3. En déduire un intervalle de confiance pour θ au risque de 5%. En déduire une estimation pour θ.
4. Calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle. En déduire un intervalle de confiance pour $\mathbb{P}(X \geq 40000)$ au risque de 5% et une estimation.
5. Comparer ces résultats avec les fréquences empiriques calculées sur la série statistique.

Deuxième partie - On suppose maintenant que la durée de vie des composants électroniques suit une loi dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_\theta(x) = \frac{x}{\theta^2}\exp(-\frac{x}{\theta}) \text{ pour } x \geq 0,\ 0 \text{ sinon}$$

avec θ un paramètre inconnu.

1. Calculs préliminaires. On pose pour $n \geq 0$,

$$J_n(\theta) = \int_0^{+\infty} x^n \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) \mathrm{d}x$$

   (a) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie, que pour $n \geq 0$,
   $J_{n+1} = (n+1)\theta J_n(\theta)$. En déduire que $J_n(\theta) = \theta^{n+1}n!$

   (b) En déduire que f_θ définit bien une densité de probabilité, puis que $\mathbb{E}(X) = \theta$ et $Var(X) = 2\theta^2$.

2. Donner un intervalle de confiance pour θ au risque de 5%. En déduire une estimation pour θ.