

Feuille d'exercices 5

Exercice 1. On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Pour $R \in \mathbb{R}_{>0}$, on note $I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx$, $C_R = [0, R] \times [0, R] \subset \mathbb{R}^2$ le carré du plan et $D_R = \{(x, y) \in C_R \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

1. Montrer que $I_R^2 = \int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.
2. En déduire que $\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq I_R^2 \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$.
3. En passant en coordonnées polaires, montrez que $\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr$.
4. Calculer cet intégrale et montrez que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ est une densité de probabilité sur \mathbb{R} .

Exercice 2.

1. Vérifier que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x)$ n'est une densité de probabilité que lorsque $\lambda > 0$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ *i.e.* ayant pour densité f . Donnez la loi de sa partie entière.

On dit qu'une variable aléatoire X est sans mémoire si $\mathbb{P}(X > t + s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

3. Montrez que si X suit une loi exponentielle alors X est sans mémoire.
4. Montrez que si X est positive, sans mémoire et à densité alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 3.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $N(0, 1)$. On pose $Y = X^2$. Donnez la fonction de répartition puis la densité de Y . Calculez son espérance. On dit que Y suit une loi du χ^2 .
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Déterminez la loi de $Y = \tan(X)$.
3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Laplace, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Quelle est la loi de $|X|$?

Exercice 4. Soit S une variable aléatoire positive à densité. Montrez que $\mathbb{E}(S) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(S > t) dt$. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Calculez $\mathbb{E}(\min(X_1, \dots, X_n))$ et $\mathbb{E}(\max(X_1, \dots, X_n))$.

Exercice 5. Vous arrivez à un arrêt de bus à 10 : 00. Le bus passera entre 10 : 00 et 10 : 30 avec une probabilité uniforme. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes ? Si le bus n'est pas passé à 10 : 15, quelle est la probabilité d'attendre au moins 10 minutes de plus ?

Exercice 6. Parmi les fonctions définies sur \mathbb{R} par les formules suivantes, quelles sont les densités de probabilités ?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} & f(x) &= e^{-x} \mathbb{1}_{[0, +\infty[}(x) & f(x) &= x^2 \mathbb{1}_{[0, 1]}(x) \\ f(x) &= \frac{1}{2} e^{-x} & f(x) &= \sin(x) \mathbb{1}_{[0, 3\pi/2]}(x) & f(x) &= (1 + \cos(x)) \mathbb{1}_{[0, \pi]}(x) \end{aligned}$$

Lorsque c'est le cas, déterminer leurs fonctions de répartitions et calculez leurs espérances.

Exercice 7. Calculez les fonctions de répartition, les espérances et les variances des lois de densité f dans les cas suivants

1. Loi uniforme sur $[a, b]$: $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b]}(x)}{b-a}$
2. Loi normale $N(\mu, \sigma^2)$: $f(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
3. Loi de Pearson : $f(x) = xe^{-x^2} \mathbb{1}_{[0,\infty[}$

Exercice 8. On considère que la durée de vie (exprimée en années) d'un individu est une v.a. X qui admet pour densité une fonction f telle que $f(x) = ax^2(100-x) \mathbb{1}_{[0,100]}(x)$.

1. Déterminer a .
2. Calculer l'espérance de vie d'un individu et la variance de X .
3. Calculer la probabilité qu'un individu meurt entre 40 et 60 ans.

Exercice 9. Soit X une v.a. de densité $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = x \exp(-\frac{x^2}{2})$ si $x \geq 0$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Trouver la loi de $Y = X^2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y .
4. On s'intéresse aux précipitations à Brest. On suppose que la durée T (en heure) écoulée entre deux précipitations vérifie une relation $T = \lambda Y$ où λ est une constante. En consultant les relevés météo, on se rend compte qu'il s'écoule au moins 24 heures consécutives sans pluie avec une probabilité de 0,09.
Déterminer λ .
Combien de temps s'écoule-t-il en moyenne entre deux averses ?
Il est midi. La pluie vient de s'arrêter. Quelle est la probabilité qu'il pleuve avant 14 h ?

Exercice 10. On note T la durée de vie d'une bactérie d'une certaine espèce. On considère que T est une variable aléatoire, qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , $\lambda > 0$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une bactérie ?
2. Calculer la probabilité qu'une bactérie meurt avant l'instant t , où $t > 0$. En déduire la probabilité qu'elle vive au moins jusqu'à l'instant t .
3. Déterminer le temps d tel que $\mathbb{P}(T > d) = \frac{1}{2}$. Comment peut-on interpréter ce temps ?
4. On dispose d'un grand nombre n de bactéries. On admet qu'elles sont nées au même instant et que leurs durées de vie sont indépendantes les unes des autres. Dans la suite, on fixe $t > 0$, on note $p = \mathbb{P}(T > t)$ et N le nombre de bactéries qui vivent encore à l'instant t . On considère les variables X_1, \dots, X_n définies par $X_i = 1$ si la i -ème bactérie est encore vivante à l'instant t , $X_i = 0$ sinon (pour $1 \leq i \leq n$).
5. Quelle est l'espérance de X_1 ?
6. Exprimer N en fonction de X_1, \dots, X_n .
7. Que représente $\frac{N}{n}$?
8. Quelle est la limite de $\frac{N}{n}$ en probabilité ? En déduire une nouvelle interprétation de d .