Feuille d'exercices 5

Exercice 1. On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.
Pour $R \in \mathbb{R}_{>0}$, on note $I_R = \int_0^R e^{-x^2}dx$, $C_R = [0,R]\times[0,R] \subset \mathbb{R}^2$ le carré du plan et $D_R = \{(x,y) \in C_R \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$.

1. Montrer que $I_R^2 = \int_{C_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.
2. En déduire que $\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \leq I_R^2 \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$.
3. En passant en coordonnées polaires, montrez que $\int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-r^2}rdr$.
4. Calculer cet intégrale et montrez que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. En déduire que $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Vérifier que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ n'est une densité de probabilité que lorsque $\lambda > 0$.
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramère λ *i.e.* ayant pour densité f. Donnez la loi de sa partie entière.

On dit qu'une variable aleatoire X est sans mémoire si $\mathbb{P}(X > t+s | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$.

3. Montrez que que si X suit une loi exponentielle alors X est sans mémoire.
4. Montrez que si X est sans mémoire et à densité alors X suit une loi exponentielle.

Exercice 3.

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi $N(0,1)$. On pose $Y = X^2$. Donnez la fonction de repartition puis la densité de Y. Calculez son espérance. On dit que Y suit une loi du χ^2
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Déterminez la loi de $Y = tan(X)$.
3. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Laplace, *i.e.* de densité $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Quelle est la loi de $|X|$?

Exercice 4. Soit S une variable aléatoire positive à densité. Montrez que $\mathbb{E}(S) = \int_0^\infty \mathbb{P}(S > t)dt$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. Calculer $\mathbb{E}(min(X_1,\ldots,X_n))$ et $\mathbb{E}(min(X_1,\ldots,X_n))$.

Exercice 5. Vous arrivez à un arrêt de bus à 10 : 00. Le bus passera entre 10 : 00 et 10 : 30 avec une probabilité uniforme. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes ? Si le bus n'est pas passé à 10 : 15, quelle est la probabilité d'attendre au moins 10 minutes de plus ?

Exercice 6. Parmi les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par les formules suivantes, quelles sont les densités de probabilités ?

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2} \qquad f(x) = e^{-x}\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \qquad f(x) = x^2\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$
$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-x} \qquad f(x) = \sin(x)\mathbb{1}_{[0,3\pi/2[}(x) \qquad f(x) = (1+\cos(x))\mathbb{1}_{[0,\pi]}(x)$$

Lorsque c'est le cas, déterminer leurs fonctions de répartitions et calculez leurs espérances.

Exercice 7. Calculez les fonctions de répartitions, les espérances et les variances des lois de densité f dans les cas suivants

1. *L*oi uniforme sur $[a,b]$: $f(x) = \frac{\mathbb{1}_{[a,b](x)}}{b-a}$
2. *L*oi normale $N(\mu,\sigma^2)$: $f(x) = \frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
3. *L*oi de Pearson : $f(x) = xe^{-x^2}\,\mathbb{1}_{[0,\infty[}$

Exercice 8. On considère que la durée de vie (exprimée en années) d'un individu est une v.a. X qui admet pour densité une fonction f telle que $f(x) = ax^2(100-x)\,\mathbb{1}_{[0,100]}(x)$.

1. Déterminer a.
2. Calculer l'espérance de vie d'un individu et la variance de X.
3. Calculer la probabilité qu'un individu meurt entre 40 et 60 ans.

Exercice 9. Soit X une v.a. de densité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = x\exp(-\frac{x^2}{2})$ si $x \geq 0$.

1. Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
2. Trouver la loi de $Y = X^2$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.
4. On s'intéresse aux précipitations à Brest. On suppose que la durée T (en heure) écoulée entre deux précipitations vérifie une relation $T = \lambda Y$ où λ est une constante. En consultant les relevés météo, on se rend compte qu'il s'écoule au moins 24 heures consécutives sans pluie avec une probabilité de $0,09$.
   Déterminer λ.
   Combien de temps s'écoule-t-il en moyenne entre deux averses ?
   Il est midi. La pluie vient de s'arrêter. Quelle est la probabilité qu'il pleuve avant 14 h ?

Exercice 10. On note T la durée de vie d'une bactérie d'une certaine espèce. On considère que T est une variable aléatoire, qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une bactérie ?
2. Calculer la probabilité qu'une bactérie meurt avant l'instant t, où $t > 0$. En déduire la probabilité qu'elle vive au moins jusqu'à l'instant t.
3. Déterminer le temps d tel que $\mathbb{P}(T > d= 1_{\overline{2}}$. Comment peut-on interpréter ce temps ?
4. On dispose d'un grand nombre n de bactéries. On admet qu'elles sont nées au même instant et que leurs durées de vie sont indépendantes les unes des autres. Dans la suite, on fixe $t > 0$, on note $p = \mathbb{P}(T > t)$ et N le nombre de bactéries qui vivent encore à l'instant t. On considère les variables $X_1,\dots,X_n$ définies par $X_i = 1$ si la $i-$ème bactérie est encore vivante à l'instant t, $X_i = 0$ sinon (pour $1 \leq i \leq n$).
5. Quelle est l'espérance de X_1 ?
6. Exprimer N en fonction de $X_1,\dots,X_n$.
7. Que représente $\frac{N}{n}$?
8. Quelle est la limite de $\frac{N}{n}$ en probabilité ? En déduire une nouvelle interprétation de d.