Feuille d'exercices 4

Exercice 1. On lance un dé 20 fois. Soit V la v.a. égale au nombre de 5 obtenus. Déterminer la loi de V . Quelle est la probabilité d'obtenir un 5 trois fois ?

Exercice 2. On dispose de trois urnes et de trois boules. On place chacune des boules au hasard dans l'une des urnes. Soit V la v.a. égale au nombre d'urnes qui ne sont pas vides. Déterminer la loi de V et sa fonction de répartition.

Exercice 3. Dans un bureau de vote, l'urne contient 1000 bulletins, dont 5 pour cent sont déclarés nuls. On en prend 100 au hasard (sans remise). On note X une v.a. représentant le nombre de nuls dans un tel échantillon.
Quelle est la loi de X ? Comment calculer $\mathbb{P}[\{X \leq 5\}]$? En donner une valeur approchée.

Exercice 4. Soient X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p et $P \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme. Montrez que $P(X) = (P(1)-P(0))X + P(0)$ et déduisez-en son espérance et sa variance.

Exercice 5. Soient $a \neq b$ deux nombres réels non nuls, X une v. a. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$. Calculer les variances de X, Y et $X+Y$ respectivement. Les v. a. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Soient X et Y deux v. a. indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $q = 1-p$, $S = X+Y$ et $D = X-Y$.

1. Quelle est la loi de S ?
2. Déterminer la loi de D.
3. Déterminer les espérances de S et D et leurs variances.
4. Calculer $\mathbb{E}[SD]$.
5. Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Soient Ω un univers et $\mathbb{P}$ une probabilité sur Ω. On considère trois évènements A_1, A_2 et A_3.
Déterminer la loi de la v.a. $X = \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2}$ en fonction de $p_1 = \mathbb{P}[A_1]$, $p_2 = \mathbb{P}[A_2]$ et $p_{1,2} = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2]$.
Même question pour $Y = \mathbb{1}_{A_1} + \mathbb{1}_{A_2} + \mathbb{1}_{A_3}$ en fonction de p_1, p_2, $p_3 = \mathbb{P}[A_3]$, $p_{1,2}$, $p_{1,3} = \mathbb{P}[A_1 \cap A_3]$, $p_{2,3} = \mathbb{P}[A_2 \cap A_3]$ et $p_{1,2,3} = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3]$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(4, \frac{1}{2})$. Tracer le graphe de sa fonction de répartition.

Exercice 9. Soient X une variable aléatoire et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante. Montrez que $F_{f(X)} \circ f = F_X$.

Exercice 10. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = 1 - q^k$ si $k \leq x < k+1$ pour $k \geq 0$ et 0 sinon. A quelle condition sur q F est-elle la fonction de répartition d'une variable aléatoire ? Sous ces condition, déterminez la loi de cette variable aléatoire.

Exercice 11. Soit $X_1, \ldots, X_k$ des variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans $\{1, \ldots, N\}$ suivant la loi uniforme. Définir $Y = \max_{1 \leq i \leq k} X_i$ et $Z = \min_{1 \leq i \leq k} X_i$ puis donner leurs lois.

Exercice 12. Soient X et Y deux variables indépendantes.

1. On suppose que X suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
   $$\{X+Y=k\} = \bigcup_{0\leq i\leq k} \big(\{X=i\} \cap \{Y=k-i\}\big).$$
   (b) En déduire que $X+Y$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$.
   (c) En utilisant ce résultat, retrouver l'espérance et la variance d'une loi binomiale.
2. On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y une loi de Poisson $\mathcal{P}(\mu)$. Calculer de la loi de $X+Y$.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire d'image $\mathbb{N}^*$. On dit que X est sans mémoire si $\mathbb{P}(X>t+s|X>t) = \mathbb{P}(X>s)$ pour tout $(t,s) \in \mathbb{N}^2$.

1. Montrez que si X suit une loi géométrique alors elle est sans mémoire.
2. Montrez que si X est sans mémoire alors pour tout $t \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(x>t) = (\mathbb{P}(X>1))^t$.
3. Déduisez-en que X est sans mémoire si et seulement si X suit une loi géométrique.

Exercice 14. *Marche aléatoire symétrique sur* $\mathbb{Z}$ Une particule initialement placée en 0, se déplace sur $\mathbb{Z}$ par sauts successifs d'amplitude 1 ou -1 choisis au hasard .
Soit $n \geq 1$. On appelle trajectoire de la particule la suite de ses abscisses successives dans un déplacement constitué de n sauts successifs. On désigne par Ω l'ensemble de toutes les trajectoires possibles, par $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur Ω et par X la variable aléatoire donnant la position de la particule en fin de trajectoire.

1. Dans cette question, $n=2$ ou $n=3$. Expliciter Ω et représenter graphiquement les éléments de Ω par des lignes polygonales de $[0,n] \times \mathbb{Z}$. Calculer le cardinal de Ω. Indiquer les positions possibles de la particule après n sauts et calculer les probabilités correspondantes. Quelle est la loi de X ?
   Dans la suite, n est quelconque.
2. Expliciter Ω et calculer son cardinal.
3. Si $\omega \in \Omega$, on note $k(\omega)$ le nombre de sauts d'amplitude $+1$ et $l(\omega)$ le nombre de sauts d'amplitude -1 de la particule le long de la trajectoire ω. Que vaut $k(\omega)+l(\omega)$? Que représente $k(\omega)-l(\omega)$?
4. Soit $x \in \mathbb{Z}$ et A_x l'évènement "la particule est en x après n sauts".
   Exprimer A_x en fonction de X. Montrer que $A_x \neq \emptyset$ si et seulement si il existe $k,l \in \mathbb{N}$ tels que $k+l=n$ et $k-l=x$. Résoudre ce système d'équations et en déduire $\mathbb{P}[A_x]$. Donner la loi de X.

Exercice 15. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Montrez que $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X>k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) + (n+1)\mathbb{P}(X>n)$.
2. Déduisez-en que si $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X>k)$ converge alors X admet une espérance.
   Supposons que X admette une espérance
3. Montrez que $(n+1)\mathbb{P}(X>n) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k)$.
4. Déduisez-en que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X>k)$