UFR MATHÉMATIQUES — UNIVERSITÉ RENNES 1
Licence MIEE / PRB - Probabilité — Printemps 2015

Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Une urne contient 4 boules rouges et trois vertes.

1. On tire successivement deux boules dans l'urne (sans remise). Sachant qu'au premier tirage, on a obtenu une boule rouge, quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule verte au deuxième tirage ?
2. Si le tirage s'était fait avec remise, quelle serait la réponse à cette même question ?

Exercice 2. Dans un étang, il y a des poissons rouges et des poissons verts. Les poissons trop petits doivent être remis à l'eau par les pêcheurs.
On estime qu'il y a 60 pour cent de poissons rouges dans l'étang, que la moitié des poissons rouges et le tiers des poissons verts sont trop petits.
Quelle est la probabilité de pêcher un poisson trop petit ?
Sachant qu'on a pêché un poisson trop petit, quelle est la probabilité que ce soit un poisson rouge ?

Exercice 3. On considère un carré $ABCD$ et ces diagonales qui se coupent en O. Une puce saute sur ces cinq points. Elle ne reste jamais sur place. Elle choisit de sauter sur un sommet adjacent à sa position au hasard. La puce est placée en O.
- Quelle est la probalilité que la puce soit en O après un saut, deux sauts ?
- Quelle est la probabilité que la puce revienne pour la première fois en O après n saut ?
- Quelle est la probabilité que la puce soit en O après n saut ?
- Quelle est la probabilité que la puce revienne en O ?

Exercice 4. Le dé α a 4 faces blanches et deux rouges et le dé β a 2 faces blanches et 4 faces rouges.

1. On lance une pièce équilibrée. Si l'on obtient pile, on choisit le dé α, si l'on obtient face, on choisit le dé β, puis on lance le dé choisi.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche ?
   Sachant qu'on a obtenu une face blanche, quelle est la probabilité qu'on ait jeté le dé α ?
2. On modifie l'expérience : on lance maintenant deux fois le dé choisi.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une face blanche au moins ?
   Sachant qu'on a obtenu deux faces rouges, quelle est la probabilité d'avoir tiré face ?

Exercice 5. Une maladie affecte 0.05% de la population. Un test T permet de dépister cette maladie avec la fiabilité suivante :

T est positif pour 99% des personnes affectées par la maladie
T est négatif pour 95% des personnes non affectées par la maldie.

1. Calculer la probabilité qu'un individu ayant un test positif soit affecté par la maladie.
2. Calculer la probabilité qu'un individu soit non malade quand le test est négatif

Exercice 6. Un tricheur a dans sa poche deux pièces de monnaie : l'une est normale, l'autre est déséquilibrée de telle sorte que Face sorte deux fois plus souvent que Pile. Il prend une pièce au hasard et obtient quatre Faces en six lancers. Quelle est la probabilité qu'il ait pris la pièce équilibré ?

Exercice 7. Soient $\mathbb{P}$ une probabilité sur un univers Ω et $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ un sysème complet d'évènements. Soient A et B deux évènements, montrez la formule suivante en précisant les hypothèses pour qu'elle ait un sens :

$$\mathbb{P}(A|B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A|E_i \cap B)\mathbb{P}(E_i|B).$$

Exercice 8. Soit n un entier strictement positif. On considère n individus $I_1,\dots,I_n$ ces individus mentent avec la probabilité p et sont mutuellement indépendants. I_1 lance une pièce et donne le résultat à I_2 qui la donne à I_3 etc. I_n annonce le résultat. Quelle est la probabilité p_n que le résultat soit le bon ? Que vaut $\lim_{n\to\infty} p_n$

Exercice 9. Une famille est composée de deux enfants. On note A,B et C les évènements "la fratrie est mixte", "l'ainé est une fille" et "le cadet est un garçon". Montrer que A, B et C sont deux à deux indépendants. Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 10. Le nombre X d'électrons émis par un corps radioactif durant une période donnée suit une loi de Poisson de paramètre λ :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k \in \mathbb{N}$$

Chacun des électrons, indépendamment des autres, a une probabilité p d'avoir un effet biologique ($0 < p < 1$). On note Z le nombre d'électrons ayant un effet biologique, émis par l'élément radioactif durant la période donnée.

1. Quelle est la probabilité que, parmi n électrons émis durant la période donnée, k aient un effet biologique ; autrement dit, quelle est l'expression de $\mathbb{P}(Z = k|X = n)$?
2. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(Z = k)$.