UFR MATHÉMATIQUES
Licence MIEE / PRB - Probabilité

UNIVERSITÉ RENNES 1
Printemps 2015

Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soient Ω un ensemble et A et B des parties de Ω.
Simplifier les expressions $E = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cap B^c)$ et $F = (A \cup B) \cap (A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$.

Exercice 2. Soient Ω un ensemble et A, B, C des parties de Ω.
Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
3. $(A \cup B = \Omega) \implies (A \subset B^c)$
4. $(A \cup B = \Omega) \implies (A^c \subset B)$
5. $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \implies (A = B^c)$
6. $(A \subset B^c) \implies (A \cup B = \Omega)$
7. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

Exercice 3. Fonctions indicatrices Soit A un sous-ensembles d'un ensemble Ω. On note $\mathbb{1}_A$ la fonction indicatrice de A définie sur Ω par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si ω appartient à A et $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ sinon.
Que vaut $\mathbb{1}_A$ lorsque $A = \emptyset$? lorsque $A = \Omega$?
Dans le cas général, montrer que l'on a : $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$, $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$, $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{A^c} = 0$, $\mathbb{1}_A \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_A$.
Application : utiliser les fonctions indicatrices pour simplifier les expressions $(A^c \cup B) \cap (A \cap B^c)$ et $(A^c \cup B) \cap (A \cup B^c)$.

Exercice 4. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble Ω.
Montrer que $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.
Montrer que $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)$.
Soient $A_1, \ldots A_n$ des parties de Ω. Donner et démontrer une formule pour le cardinal de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ en fonction de ceux des intersections.

Exercice 5. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et k. On note F^E l'ensemble des applications de E dans F : $F^E = \{f \mid f : E \to F\}$. Quel est le cardinal de F^E ?

Exercice 6. Soit E un ensemble de cardinal n (on notera $\#E = n$). On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E : $\mathcal{P}(E) = \{F \mid F \subset E\}$. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 7. Donnez une bijection entre $\mathcal{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$.

Exercice 8. Les n chevaliers de la table ronde doivent s'installer pour dîner. Combien y a -t-il de plans de table possibles ?

Exercice 9. On jette 10 fois successivement une pièce de monnaie. Comment représenter le résultat d'une telle épreuve ? Combien a t-on de résultats différents ? Combien de résultats comptent exactement trois piles ? Combien de résultats comptent au moins un pile ?

Exercice 10. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne.
Comment représenter le résultat d'une telle épreuve ?
Combien y a-t-il de tirages possibles ?
Combien de tirages amènent

– 1 boule noire au plus ?
– 3 boules blanches exactement ?
– 1 boule blanche au moins ?
– 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?
– 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?

Exercice 11. Reprendre l'exercice précédent en supposant cette fois que les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage.

Exercice 12. On dispose de 13 livres différents : 4 de mathématique, 6 de physique et 3 de chimie. On les range au hasard. Combien de façons y a-t-il de les ranger sur une même étagère ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en regroupant les livres de mathématique ?
Combien de façons y a-t-il de les ranger en les regroupant par matière ?
Justifier vos réponses.

Exercice 13. Soient E un ensemble de cardinal n et k un entier. On note

$$\binom{n}{k} = \#\{F \mid F \subset E \text{ et } \#F = k\}.$$

Montrer les égalités suivantes :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

En utilisant la formule du binome calculer

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}.$$

Exercice 14. Soient n un entier et k, i deux entiers inférieurs à n.
– Comptez le nombre de parties à $k+1$ éléments de $\{1,2,\ldots,n+1\}$ dont le plus grand élément est $i+1$.
– Déduisez-en $\sum_{i=0}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.
– Retrouvez ce résultat par une récurrence.
– Montrez que $\sum_{i=0}^{n} \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}$.

Exercice 15. Montrer l'identité de Vandermonde $\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 16. Soient $0 < k \leq n$ deux entiers. Comptez de deux manières le nombre de couples (x,P) où P est une partie de $\{1,2,\ldots,n\}$ de cardinal k et $x \in P$ et montrez que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. Déduidez-en la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^{n} (k^3+k^2+k+1)\binom{n}{k}$.

Exercice 17. Soient m et n deux entiers. On note $L(m,n)$ le nombre de chemins du plan $\mathbb{R}^2$ joignant $(0,0)$ à (m,n) en se déplaçant vers l'est (translation de $(+1,0)$) ou vers le nord (translation de $(0,+1)$).
– Montrez que $L(m,n) = \binom{m+n}{n}$
– Déduisez-en l'identité de Pascal.
– Déduisez-en l'identité de Vandermonde.