Devoir maison

Pile ou face et probabilité uniforme sur $[0,1]$

A) Questions préliminaires :

On appelle rationnel dyadique tout nombre rationnel qui peut s'écrire sous la forme $\frac{k}{2^n}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le but de cette partie est de prouver que chaque réel x dans l'intervalle ouvert $]0,1[$ qui n'est pas un rationnel dyadique, s'écrit de façon **unique** comme :

$$x = \sum_{k=1} \frac{\epsilon_k}{2^k},\ \epsilon_k \in \{0,1\},$$

1. Vérifiez que $\frac{1}{2}$ est un rationnel dyadique et décomposez le de deux façon différentes sous la forme $\sum_{k\geq 1} \frac{\epsilon_k}{2^k}$.
2. Soit une suite $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, on pose $y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}$. Prouvez pour $N \geq 1$ que
$$0 \leq 2^N y - \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k 2^{N-k} \leq 2^N \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}.$$
3. Supposons de plus que y n'est pas un rationnel dyadique, prouvez que la suite $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$ ci-dessus n'est pas constante égale à 1 à partir d'un certain rang. En déduire dans ce cas là l'inégalité **stricte**, pour tout $N \geq 1$.
$$0 < 2^N y - \sum_{k=1}^{N} \epsilon_k 2^{N-k} < 1.$$
4. Déduisez en que $\sum_{k=1}^{N} \epsilon_k 2^{N-k} = \lfloor 2^N y \rfloor$. Prouvez alors l'unicité de la décomposition. *(Utilisez l'unicité de l'écriture en base deux)*

5. Réciproquement, étant donné x dans $]0,1[$, en utilisant que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}\lfloor 2^n x\rfloor = x$, prouvez l'existence d'une telle décomposition.

B) De Bernoulli à la loi uniforme

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ donné (qu'on ne cherchera pas à expliciter), on se donne une suite de variables aléatoires $(\epsilon_k)_{k\geq 1}$, **indépendantes**, de loi de Bernouilli de paramètre $\frac{1}{2}$. Et on pose

$$X = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k}.$$

1. Pour tout $(a_1, \cdots, a_p)$ dans $\{0,1\}^p$, on pose l'évènement $A = \{\epsilon_1 = a_1, \epsilon_2 = a_2, \cdots, \epsilon_p = a_p\}$. Calculez $\mathbb{P}(A)$.
2. Posons l'évènement $B = \bigcap_{i\geq p+1} \{\epsilon_i = 1\}$. Prouvez que $\mathbb{P}(B) = 0$. En déduire que $\mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)$. On notera $A^\star = A \cap B^c$.
3. Prouvez que $A^\star \subset \{\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^p} \leq X < \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^p} + \frac{1}{2^p}\} \cap B^c$.
4. Prouvez que si B^c est réalisé alors $\lfloor 2^p X\rfloor = \sum_{k=1}^{p} 2^{p-k}\epsilon_k$.
5. Déduire de la question précédente que

$$\{\sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^p} \leq X < \sum_{k=1}^{p} \frac{a_k}{2^p} + \frac{1}{2^p}\} \cap B^c \subset A^\star.$$

   (On pourra multiplier par 2^p et exprimer la partie entière de $2^p X$ de deux façons...)
6. En déduire que pour entier k on a $\mathbb{P}(X \in [\frac{k}{2^N}, \frac{k+1}{2^N}[\ ) = \frac{1}{2^N}$. Prouvez enfin que pour tous entiers $k \leq l$ on a $\mathbb{P}(X \in [\frac{k}{2^N}, \frac{l}{2^N}[\ ) = \frac{l-k}{2^N}$.
7. Déduisez-en que X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$. On pourra admettre que les rationnels dyadiques sont **denses** dans $[0,1]$.
8. Pour les plus courageux, prouvez la densité des réels dyadiques.