Contrôle Continu du 26 février 2015

Aucun document ni instrument autres que 3 stylos ne sont autorisés.

La qualité de la rédaction sera notée sur **deux points** ; la présentation de la copie sur **un point**.

Questions de cours (4pts)

Soit Ω un ensemble.
Donnez les trois conditions que doit satisfaire $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ pour être une probabilité.
À partir de cette définition démontrez que $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exercice I (3pts)

Soit n un entier strictement positif. On considère n individus $I_1, \ldots, I_n$ ces individus mentent avec la probabilité p et sont mutuellement indépendants. I_1 lance une pièce et donne le résultat à I_2 qui le donne à I_3 etc. I_n annonce le résultat. Quelle est la probabilité p_n que le résultat soit le bon ? Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

Exercice II (10 pts)

On jette m dés non truqués numérotés : dé n°1, dé n°2, …et dé n°m. On ramasse les dés ne donnant pas un six et on les lance à nouveaux. Ceci indéfiniment jusqu'à ce que l'on ait m six.

PRÉLIMINAIRES

Soit E un ensemble ayant m éléments. On rappelle la définition suivante

$$\binom{m}{k} = \#\{F \subset E | \#F = k\}.$$

P-1) En calculant de deux manières le cardinal de

$$\{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2 \mid A \cap B = \varnothing, \#A = k \text{ et } \#B = \ell\}$$

montrez que

$$\binom{m}{k}\binom{m-k}{\ell} = \binom{m}{\ell}\binom{m-\ell}{k}$$

P-2) En calculant de deux manières le cardinal de

$$\{(x,F) \in E \times \mathcal{P}(E) \mid x \in F, \#F = k\}.$$

montrez que

$$k\binom{m}{k} = m\binom{m-1}{k-1}.$$

LE MODÈLE

Le résultat du n-ème lancer est une liste $(r_1, \dots, r_m) \in [\![0,6]\!]^m$ donnant la face de chaque dé s'il a été lancé et 0 s'il n'a pas été lancé. Le résultat de nos lancers est donné par un élèment de $\Omega = ([\![0,6]\!]^m)^{\mathbb{N}_{>0}}$. Nous admettrons qu'il existe une probabilité $\mathbb{P}$ modélisant l'aléa des lancers.

PREMIER LANCER

1) Soit X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de six obtenus au premier lancer.

1-1) Explicitez $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ et donnez son ensemble de valeurs.

1-2) Déterminez la loi de X_1.

1-3) Calculez $\mathbb{E}(X_1)$, $\mathbb{E}(X_1(X_1-1))$ et déduisez-en la variance de X_1.

DEUXIÈME LANCER

2) Soit X_2 la variable aléatoire donnant le nombre de six supplémentaires obtenus au deuxième lancer.

2-1) Pour k et ℓ deux entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant m-\ell$, calculez $\mathbb{P}(X_2 = k | X_1 = \ell)$.

2-2) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes. ?

2-3) Déterminez la loi de X_2.

2-4) Calculez son espérance.

n-ÈME LANCER

3) On note Z_i la variable aléatoire donnant nombre de fois où le dé n°i a été lancé lorsqu'il donne (enfin) un six.

3-1) Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, calculez $\mathbb{P}(Z_i = n)$. Quelle loi reconnaissez-vous ?

3-2) Calculez $\mathbb{E}(Z_i)$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$, on note X_n la variable aléatoire donnant le nombre de six supplémentaires obtenus au n-ème lancer.

4-1) Déterminez la loi de X_n

4-2) Donnez son espérance.

DERNIER LANCER

5)

5-1) Que représente $\sum_{i=1}^n X_i$? Prouvez que la limite existe lorsque n tend vers l'infini.

5-2) Pour k entier tel que $0 \leqslant k \leqslant m$ et $n \in \mathbb{N}_{>0}$, calculez $\mathbb{P}(X_n = 0 | \sum_{i=1}^{n-1} X_i = k)$.

5-3) Déduisez-en que si $k < m$ alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell \geqslant n} \{X_\ell = 0\} \Big| \sum_{i=1}^{n-1} X_1 = k\right) = 0$$

5-4) Montrez que $k < m$ alors $\mathbb{P}(\sum_{n \geqslant 1} X_n < k) = 0$ et interprétez ce résultat.

CORRECTION

Questions de cours. Pour qu'une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ soit une probabilité il faut que
– $\mathbb{P}$ soit positive,
– $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
– Pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties de Ω deux à deux disjointes, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$.

Puisque $A = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)$ est une réunion disjointe on a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B^c)$; de même $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A^c\cap B)$. Dans $A\cup B = (A\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ le membre de droite est aussi une réunion disjointe. Ainsi

$$\mathbb{P}(A\cup B) + \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B^c) + \mathbb{P}(A^c\cap B) + \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$$

Exercice 1 – première correction. En notant 0 lorsqu'un individu ne ment pas et 1 lorsqu'il ment, nous modélisons l'expérience par $\widetilde{\Omega} = \{0,1\}^n$ muni d'une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ que nous allons partiellement déterminer. La réponse annoncée par le n-ème individu est correcte si il y a un nombre pair de menteurs. Notre expérience est une répétition d'expériences indépendantes et nous comptons le nombre de "succès", le nombre de menteur suit donc une loi binomiale :

$$\widetilde{\mathbb{P}}(\{\omega\in\Omega | \sum \omega_i = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Nous voulons calculer $p_n = \widetilde{\mathbb{P}}(\{\omega\in\Omega | \sum\omega_i \equiv 0 \text{ mod } 2\}) = \sum_{\ell=0}^{[n/2]} \binom{n}{2\ell} p^{2\ell}(1-p)^{n-2\ell}$.
Nous savons que :
$(p + (1-p))^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} p^\ell (1-p)^{n-\ell}$ et $(-p + (1-p))^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-p)^\ell (1-p)^{n-\ell}$.
En sommant ces deux égalités, les puissances impaires de p s'annulent et nous obtenons :

$$p_n = \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

lorsque $p \neq 1$ car dans ce cas $(1-2p) \in]-1,0]$. Cette suite n'a pas de limite lorsque $p = 1$.

Exercice 1 – deuxième correction. En notant 0 lorsqu'un individu donne la mauvaise réponse et 1 lorsqu'il donne la bonne, nous modélisons l'expérience par $\Omega = \{0,1\}^n$ muni d'une probabilité $\mathbb{P}$ que nous allons partiellement déterminer. Nous voulons calculer $\mathbb{P}(\{\omega | \omega_n = 1\})$. Les deux ensembles $\{\omega \mid \omega_{n-1} = 1\}$ et $\{\omega \mid \omega_{n-1} = 0\}$ forment une partition de Ω. Si ces deux évènement sont de probabilités non nulles alors la formule des probabilités totales donne

$$\mathbb{P}(\omega_n = 1) = \mathbb{P}(\omega_n = 1 | \omega_{n-1} = 1)\mathbb{P}(\omega_{n-1} = 1) + \mathbb{P}(\omega_n = 1 | \omega_{n-1} = 0)\mathbb{P}(\omega_{n-1} = 0)$$

c'est-à-dire $\qquad p_n = (1-p)p_{n-1} + p(1-p_{n-1}) = p + (1-2p)p_{n-1}$.
Le point fixe de cette relation de récurrence est ℓ vérifiant $\ell = p + (1-2p)\ell$ (*i.e.* $\ell = 1/2$) ; la suite $p_n - \ell$ est une suite géométrique de raison $(1-2p)$ et $p_n - \ell = (1-2p)^{n-1}(p_1 - \ell)$. Puisque $p_1 = 1-p$ nous obtenons

$$p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

lorsque $p \neq 1$ car dans ce cas $(1-2p) \in]-1,0]$. Cette suite n'a pas de limite lorsque $p = 1$.

Remarquons que même si l'un des deux évènements de notre partition est de probabilité nulle, la relation de récurrence est encore valable.

Exercice 2

P-1 Nous avons $\binom{m}{k}$ choix pour la partie A puis quelle que soit A nous avons $\binom{m-k}{\ell}$ choix pour B. Le membre de gauche de l'égalité est donc le cardinal de l'ensemble indiqué. D'un autre coté, nous avons $\binom{m}{\ell}$ choix pour la partie B puis quelle que soit B nous avons $\binom{m-\ell}{k}$ choix pour A. Le membre de droite de l'égalité est donc, aussi, le cardinal de l'ensemble indiqué, ce qui prouve l'égalité.

P-2 Nous avons $\binom{m}{k}$ choix pour la partie F puis quelle que soit F nous avons k choix pour x. Le membre de gauche de l'égalité est donc le cardinal de l'ensemble indiqué. D'un autre coté, nous avons m choix pour l'élément x puis quel que soit x nous avons $\binom{m-1}{k-1}$ choix pour $F-\{x\}$. Le membre de droite de l'égalité est donc le cardinal de l'ensemble indiqué, ce qui prouve l'égalité.

1-1 Pour $\omega \in \Omega$, on a $\omega_1 \in [\![0,6]\!]^m$ et $X_1(\omega) = \#\{i \in [\![1,m]\!] | (\omega_1)_i = 6\}$. Son ensemble des valeurs est $[\![1,m]\!]$.

1-2 La variable aléatoire compte le nombre de succès lors de la réalisation de m lancers indépendants. La probabilité du succès d'un lancer est $1/6$ ainsi $\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-k)}$.

1-3 Calculons directement : $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=0}^m k\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-k)} = \frac{m}{6}\sum_{k=1}^m \binom{m-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-k)} = \frac{m}{6}$. Les mêmes calculs donnent : $\mathbb{E}(X_1(X_1-1)) = \sum_{k=0}^m k(k-1)\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-k)}$
$= \frac{m}{6}\sum_{k=1}^m (k-1)\binom{m-1}{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-k)} = \frac{m(m-1)}{6^2}\sum_{k=2}^m \binom{m-2}{k-2}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-2}\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-k)} = \frac{m(m-1)}{6^2}$. Par linéarité de l'espérance on a $Var(X_1) = \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \mathbb{E}(X_1(X_1-1)) + \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{5m}{6}$

2-1 Si on sait que $X_1 = \ell$ alors on ne relance que $m-\ell$ dés. Comme dans la question 1, le nombre de 6 obtenus suit une loi binomiale : $\mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = \ell) = \binom{m-\ell}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-\ell-k)}$.

2-2 Puisque $\mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = \ell)$ change de valeurs avec ℓ, ces nombres sont différents de $\mathbb{P}(X_2 = k)$ *i.e.* les variables ne sont pas indépendantes.

2-3 Appliquons la formule des probabilités totales au système complets d'évènements $(\{X_1 = \ell\})_{\ell \in [\![0,m]\!]}$: $\quad \mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{\ell=0}^m \mathbb{P}(X_2 = k|X_1 = \ell)\mathbb{P}(X_1 = \ell)$
$= \sum_{\ell=0}^m \binom{m-\ell}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-\ell-k)}\binom{m}{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^\ell\left(\frac{5}{6}\right)^{(m-\ell)} = \sum_{\ell=0}^{m-k}\binom{m-k}{\ell}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^{k+\ell}\left(\frac{5}{6}\right)^{(2m-2\ell-k)}$
$= \binom{m}{k}\left(\frac{5}{6^2}\right)^k\sum_{\ell=0}^{m-k}\binom{m-k}{\ell}\left(\frac{1}{6}\right)^\ell\left(\frac{5^2}{6^2}\right)^{(m-\ell-k)} = \binom{m}{k}\left(\frac{5}{6^2}\right)^k\left(\frac{1}{6}+\frac{5^2}{6^2}\right)^{m-k} = \binom{m}{k}\left(\frac{5}{36}\right)^k\left(\frac{31}{36}\right)^{m-k}$.

2-4 Nous avons déjà calculer l'espérance d'une loi binomial, nous trouvons : $\mathbb{E}(X_2) = m\frac{5}{36}$.

3-1 Puisque $\{Z_i = n\} = \{\omega \mid (\omega_k)_i \neq 6 \text{ si } k < n \text{ et } (\omega_n)_i = 6\}$ l'indépendance des lancers donne $\mathbb{P}(Z_i = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)$ *i.e.* Z_i suit une loi géométrique.

3-2 Un calcul direct donne $\mathbb{E}(Z_i) = \sum_{n\geqslant 1} n\mathbb{P}(Z_i = n) = \frac{1}{6}\sum_{n\geqslant 1} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\frac{1}{(1-5/6)^2} = 6$.

4-1 D'après la question précédente, la probabilité qu'un dé soit lancé n fois et donne un six au n-ème lancer est de $\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)$. La variable X_n suit donc une loi binomiale $B(m, \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right))$.

4-2 Nous avons déjà calculer l'espérance d'une loi binomial, nous trouvons : $\mathbb{E}(X_n) = m\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6}\right)$.

5-1 Cette somme est le nombre de 6 obtenus après n lancers. C'est une somme d'entiers positifs et ses sommes partielles sont majorés par m. Elle est donc stationnaire et *a fortiori* convergente.

5-2 Sachant que $\sum_{i=1}^{n-1} X_i = k$, nous jetons $m-k$ dés au n-ème lancer. La probabilité qu'aucuns de ces dés ne donnent un 6 est $\left(\frac{5}{6}\right)^{m-k}$.
5-3 D'après la formule des probabilités en cascades pour tout $N > n$:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=n}^{N}\{X_\ell = 0\} \cap \{\sum_{i=1}^{n-1} X_1 = k\}\right)$$
$$= \left(\prod_{\ell=n}^{N} \mathbb{P}(\{X_\ell = 0\} | \bigcap_{i=n}^{\ell-1}\{X_i = 0\} \cap \{\sum_{i=1}^{n-1} X_1 = k\})\right) \mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n-1} X_1 = k).$$

La quetion précédente donne $\mathbb{P}\left(\bigcap_{\ell=n}^{N}\{X_\ell = 0\} \big| \sum_{i=1}^{n-1} X_1 = k\}\right) = \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{m-k}\right)^{N-n+1}$. Si $m > k$ ce produit tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.
5-4 Il existe un entier N à partir duquel $\sum_{n \geqslant 1} X_n = \sum_{n=1}^{N} X_n$. Notons S la valeur maximale de cette fonction. on a $\mathbb{P}(\sum_{n \geqslant 1} X_n = S) = \mathbb{P}(\{\sum_{n=1}^{N} X_n = S\} \cap \bigcap_{\ell \geqslant N+1}^{N}\{X_\ell = 0\})$. Nous venons de montrer que si $S < m$ alors cette probabilité est nulle. Puisque $P(\sum_{n \geqslant 1} X_n \leqslant k) = P(\bigcup_{S=0}^{k}\{\sum_{n \geqslant 1} X_n = S\})$ et que ces évènements sont disjoints de probabilités nulles, la formule est montrée. Elle signifie qu'il est presque certain que nous arrêterons de lancer les dés.