UFR MATHÉMATIQUES — UNIVERSITÉ RENNES 1

Licence MIEE / PRB - Probabilité — Printemps 2014

Contrôle Continu du 19 février 2014

(avec correction des typos)

Aucun document ni instrument autres que 3 stylos ne sont autorisés.

La qualité de la rédaction sera noté sur **deux points**, la présentation de la copie sur **un point**.

Questions de cours (4pts)

Donnez les définitions de probabilités conditionnelles et de système complet d'événements. Énoncez et démontrez la formule des probabilités totales.

Exercice I (3pts)

Dans un étang, il y a des poissons rouges et des poissons verts. Les poissons trop petits doivent être remis à l'eau par les pêcheurs. On estime qu'il y a 60 pour cent de poissons rouges dans l'étang, que la moitié des poissons rouges et le tiers des poissons verts sont trop petits.

1) Donner un modèle probabiliste modélisant la pêche d'un poisson.

2) Quelle est la probabilité de pêcher un poisson trop petit ?

3) Sachant qu'on a pêché un poisson trop petit, quelle est la probabilité que ce soit un poisson rouge ?

Exercice II (10 pts)

On lance un dé truqué indéfiniment. On notera p la probabilité qu'un lancer donne un 6 et $q = 1 - p$ celle d'obtenir une autre face. Les lancers sont mutuellement indépendants.

0) Donner un ensemble Ω modélisant l'ensemble des issus possibles.

PRÉLIMINAIRES

Pour $q \in]0,1[$ et $m \in \mathbb{N}$ on note $S_m(q)$ la série $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{k!}{(k-m)!} q^{k-m}$ et $S_m^N(q)$ sa somme partielle $\sum_{k=m}^{N} \frac{k!}{(k-m)!} q^{k-m}$.

P-1) Montrer que $(1-q)S_m^N(q) = mS_{m-1}^{N-1}(q) - \frac{N!}{(N-m)!} q^{N+1-m}$, $1 \leq m \leq N$.

P-2) Montrer que $\frac{N!}{(N-m)!} q^{N+1-m} \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

P-3) Montrer par récurrence que la série $S_m(q)$ converge et a pour somme $\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}$.

1) Pour $i \in \mathbb{N}_{>0}$ on note Y_i la variable aléatoire valant 1 si le i-ème lancer donne un 6 et 0 sinon, $E_k = \cap_{i=k+1}^{\infty}\{Y_i = 0\}$ et $E = \cup_{k=1}^{\infty} E_k$.
1-1) Décrire Y_k comme une application de Ω dans $\mathbb{R}$ et donner sa loi.
1-2) Montrer que $\mathbb{P}(E_k) = 0$, en déduire que $\mathbb{P}(E) = 0$
1-3) Montrer que Ω_m, l'ensemble des issus donnant au moins m 6 est un événement certain.

2) On note X_1 la variable aléatoire donnant le numéro du premier lancer donnant un 6.
2-1) Décrire X_1 comme une application de Ω_1 dans $\mathbb{R}$ et donner son ensemble des valeurs $X_1(\Omega_1)$.
2-2) Donnez la loi de X_1, son espérance et sa variance.

3) On note X_2 la variable aléatoire donnant le numéro du deuxième lancer donnant un 6.
3-1) Décrire X_2 comme une application de Ω_2 dans $\mathbb{R}$ et donner son ensemble des valeurs $X_2(\Omega_2)$.
3-2) Donner la loi de X_2, son espérance et sa variance.

4) Pour $m \in \mathbb{N}_{>0}$, on note X_m la variable aléatoire donnant le numéro du m-ème lancer donnant un 6.
4-1) Décrire X_m comme une application de Ω_m dans $\mathbb{R}$ et donnez son ensemble des valeurs.
4-2) Donner la loi de X_m et son espérance.
4-3) Montrer que $X_m(X_m+1)$ admet un espérance et la calculer.
4-4) En déduire la variance de X_m.

Barème : QC : 1+1+1+1 ; **Ex 1** : 1+1+1
Ex2 : 0) 1 ; P) 0,5+0,5+1 ; 1) 0,5+1+0,5 ; 2) 0,5+1,5 ; 3) 0,5+1,5 ; 4) 0,5+0,5

Éléments de correction du Contrôle Continu du 19 février 2014

Questions de cours
Dans la suite $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La probabilité de A conditionnée par B est $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Un ensemble fini ou dénombrable d'événements $\{A_i\}_{i\in I}$ est un système complet d'événements si $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ implique $i = j$ et $\cup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Formule des probabilités totales : Si $\{A_i\}_{i\in I}$ est un système complet d'événements tel que $\forall i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$ alors pour tout événement B :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

En remplaçant les probabilités conditionnelles par leurs définitions, le second membre devient $\sum_{i\in I} \mathbb{P}(B\cap A_i)$. Le propriété de $\mathbb{P}$ (σ-additivité) et la première propriété d'un système complet d'événement montrent que ce dernier est $\mathbb{P}(\cup_{i\in I} B\cap A_i)$. En factorisant B on obtient $\mathbb{P}(B\cap(\cup_{i\in I}A_i))$, la seconde propriété d'un système complet d'événement finit la preuve.

Exercice I

1) Puisque nous attrappons un poisson au hasard, nous modéliserons l'expérience aléatoire par l'ensemble Ω des poissons de l'étang muni de la probabilité uniforme.

2) Notons $R\subset\Omega$ le sous-ensemble des poissons rouges, $V\subset\Omega$ le sous-ensemble des poissons verts et $P\subset\Omega$ le sous-ensemble des poissons trop petit. L'énoncé nous dit que $\mathbb{P}(R)=3/5$, $P(V)=2/5$, $\mathbb{P}(P|R)=1/2$ et $\mathbb{P}(P|V)=1/3$. Puisque $V=R^c$, la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(P)=\mathbb{P}(P|R)\mathbb{P}(R)+\mathbb{P}(P|V)P(V)=13/30$
3) On veut calculer $\mathbb{P}(R|P)$. D'après la formule de Bayes cette probabilité est égale à $\mathbb{P}(P|R)\frac{\mathbb{P}(R)}{\mathbb{P}(P)}=9/13$.

Exercice II

0) On peut prendre $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}^{\mathbb{N}_{>0}}$ l'ensemble des suites de faces possibles. Nous noterons $\omega=(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ un élément de Ω

P-1) Développons

$$\begin{aligned}(1-q)S_m^N(q) &= (m!+\textstyle\sum_{k=m+1}^N \frac{k!}{(k-m)!}q^{k-m}) - (\sum_{k=m}^{N-1}\frac{k!}{(k-m)!}q^{k-m+1}+\frac{N!}{(N-m)!}q^{N+1-m})\\ &= m!+\textstyle\sum_{k=m}^{N-1}\left(\frac{(k+1)!}{(k-m+1)!}-\frac{k!}{(k-m)!}\right)q^{k-m+1}-\frac{N!}{(N-m)!}q^{N+1-m}\\ &= m!+\textstyle\sum_{k=m}^{N-1} m\frac{k!}{(k-m+1)!}q^{k-m+1}-\frac{N!}{(N-m)!}q^{N+1-m}\\ &= m\left(\textstyle\sum_{k=m-1}^{N-1}\frac{k!}{(k-m+1)!}q^{k-m+1}\right)-\frac{N!}{(N-m)!}q^{N+1-m},\end{aligned}$$

ce qui est l'égalité demandée.

P-2) La fonction $N\mapsto\frac{N!}{(N-m)!}$ est un polynôme en N de degré m et $N\mapsto e^{(N+1-m)\ln(q)}$ est une exponentielle tendant vers 0. Par puissances comparées la limite de $\frac{N!}{(N-m)!}q^{N+1-m}$ est nulle.

P-3) Pour $m\in\mathbb{N}$ notons H_m l'assertion "la série $S_m(q)$ converge et a pour somme $\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}$". Soit E l'ensemble des entiers m pour lesquels H_m est vrai.
- $0\in E$ car S_0 est la série géométrique de raison q et $|q|<1$.
- si $m\in E$ alors $\lim\limits_{N\to\infty}S_m^N(q)=\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}$. D'après P-1 on a $\lim\limits_{N\to\infty}(1-q)S_{m+1}^{N+1}(q)=\frac{(m+1)!}{(1-q)^{m+1}}$. Ceci montre que $m+1\in E$.

Le principe de récurrence assure que $E=\mathbb{N}$.

1-1) $Y_k:\Omega\to\mathbb{R}$ est donnée par $Y_k(\omega)$ est 1 si $\omega_k=1$ et zero sinon. Une variable aléatoire ne prenant que les valeurs 0 et 1 est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(Y_k=1)=p$.

1-2) L'indépendance des lancers donne $\mathbb{P}(\cap_{i=k+1}^N\{Y_i=0\})=\prod_{i=k+1}^N\mathbb{P}(\{Y_i=0\})=q^{N-k-1}$. Les événements $\left(\cap_{i=k+1}^N\{Y_i=0\}\right)_{N\geq k+1}$ forment une suite décroissante ainsi

$$\mathbb{P}(E_k)=\mathbb{P}\left(\left(\cap_{i=k+1}^\infty\{Y_i=0\}\right)\right)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}(\cap_{i=k+1}^N\{Y_i=0\})=\lim_{N\to\infty}q^{N-k-1}=0.$$

La probabilité d'une réunion étant inférieure à la somme des probabilités, $\mathbb{P}(E)\leq\sum_{k=1}^\infty\mathbb{P}(E_k)=0$.

1-3) Nous venons de montrer que la probabilité d'obtenir un nombre fini de 6 est nulle, Ω_m est donc un évènement certain.

Dans la suite toutes les séries étant à termes positifs, leur convergence absolue sera une conséquence de leur convergence.

2-1) $X_1 : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ est définie par $X_1(\omega) = min\{i \mid Y_i(\omega) = 1\}$. Cette application est bien définie car si $\omega \in \Omega_1$ alors l'ensemble dont on doit prendre le minimum est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. On a $X_1(\Omega_1) = \mathbb{N}_{>0}$.

2-2) Nous avons vu en cours et en TD que X_1 suit une loi géométrique de paramètre p. Son espérance est la somme de la série $\sum_{k\geq 1} kq^{k-1}p$ c'est-à-dire $\mathbb{E}(X_1) = pS_1(q) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$. Sa variance se calcule comme différence $\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_1)^2$. Le premier terme est la somme de la série $\sum_{k\geq 1} k^2 q^{k-1} p = \sum_{k\geq 1} k(k-1)q^{k-1}p + \sum_{k\geq 0} kq^{k-1}p = qpS_2(q) + pS_1(q)$. Ainsi $Var(X_1) = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$.

3-1) $X_2 : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ est définie par $X_2(\omega) = min(\{i \mid Y_i(\omega) = 1\} - \{X_1(\omega)\})$. Cette application est bien définie car si $\omega \in \Omega_2$ alors l'ensemble dont on doit prendre le minimum est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. On a $X_2(\Omega_1) = \mathbb{N}_{>1}$.

3-2) Pour $k \in \mathbb{N}_{>1}$, on a

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{k-1}\left(\{Y_i = 1\} \cap (\cap_{\substack{p=1\\p\neq i}}^{k-1}\{Y_p = 0\})\right) \cap \{Y_k = 1\}\right) = (k-1)q^{k-2}p^2.$$

Calculons $\mathbb{E}(X_2) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)q^{k-2}p^2 = p^2 S_2(q) = \frac{2p^2}{(1-q)^3} = \frac{2}{p}$.
La variance se calcule comme suit :
$Var(X_2) = \mathbb{E}(X_2(X_2+1)) - \mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_2)^2 = \sum_{k\geq 2}(k+1)k(k-1)q^{k-2}p^2 - \frac{2}{p} - \frac{4}{p^2} = \frac{6p^2}{(1-q)^4} - \frac{2}{p} - \frac{4}{p^2} = 2\frac{1-p}{p^2}$.

4-1) $X_m : \Omega_m \to \mathbb{R}$ est définie par $X_m(\omega) = min(\{i \mid \#\{j \leq i \mid Y_j(\omega) = 1\} = m\}$. On a $X_m(\Omega_m) = \mathbb{N}_{\geq m}$.

4-2) Pour $k \in \mathbb{N}_{\geq m}$,

$$\mathbb{P}(X_m = k) = \mathbb{P}\left(\cup_{\substack{E\subset\{1,\dots,k-1\}\\ \#E=m-1}} (\cap_{i\in E}\{Y_i = 1\}) \cap (\cap_{p\in\{1,\dots,k-1\}-E}\{Y_p = 0\}) \cap \{Y_k = 1\}\right) = \binom{k-1}{m-1}q^{k-m}p^m.$$

La série $\sum_{k\geq m} k\binom{k-1}{m-1}q^{k-m}p^m$ égale $\sum_{k\geq m} \frac{k!}{(k-m)!(m-1)!}q^{k-m}p^m = \frac{p^m}{(m-1)!}S_m(q) = \frac{m}{p}$.

4-3) Il nous suffit de montrer que la série $\sum_{k\geq m}(k+1)k\binom{k-1}{m-1}q^{k-m}p^m$ converge en calculant sa somme. Cette série est $\sum_{k\geq m+1} \frac{k!}{(k-m-1)!(m-1)!}q^{k-m-1}p^m = \frac{p^m}{(m-1)!}S_{m+1}(q) = \frac{(m+1)m}{p^2}$

4-4) La linéarité de l'espérance permet d'écrire $Var(X_m) = \mathbb{E}(X_m(X_m+1)) - \mathbb{E}(X_m) - \mathbb{E}(X_m)^2 = \frac{(m+1)m}{p^2} - \frac{m}{p} - \frac{m^2}{p^2} = m\frac{1-p}{p^2}$

Remarque Une manière plus élégante de calculer l'espérance et la variance de X_m consiste à remarquer que $X_k - X_{k-1}$ suit une loi géométrique de paramètre p et que toutes ces v.a. sont indépendantes. On a alors $\mathbb{E}(X_m) = \mathbb{E}(\sum_{k=2}^m (X_k - X_{k-1}) + X_1) = \sum_{k=2}^m \mathbb{E}(X_k - X_{k-1}) + \mathbb{E}(X_1) = \frac{m}{p}$ et $Var(X_m) = Var(\sum_{k=2}^m (X_k - X_{k-1}) + X_1)$ l'indépendance donne $\sum_{k=2}^m Var(X_k - X_{k-1}) + Var(X_1) = m\frac{1-p}{p^2}$.