
Pascal et les problèmes du chevalier de Méré

De l'origine du calcul des probabilités aux mathématiques financières d'aujourd'hui

Yves Derriennic¹

Résumé.— La solution donnée par Pascal au problème des partis, posé par le chevalier de Méré, contient non seulement la notion d'espérance mathématique mais aussi celle d'espérance conditionnelle, et de façon presque évidente celle de « martingale ». Dans la seconde moitié du XX^e siècle la notion de martingale a été établie comme une des notions centrales du calcul des probabilités. Le raisonnement de Pascal fondé sur une récurrence rétrograde est aussi analogue au raisonnement qui conduit au calcul du prix d'une « option » sur le marché boursier et en particulier à la célèbre formule de Black et Sholes établie en 1973 pour laquelle ses auteurs reçurent le prix Nobel d'économie en 1997.

De tous les chapitres des mathématiques celui dont la date de naissance est la mieux marquée historiquement est le calcul des probabilités. En 1654, durant l'été, Pascal et Fermat échangent une correspondance sur des problèmes posés par le chevalier de Méré. Ce dernier est un homme du monde ; ses problèmes portent sur des jeux de hasard pour lesquels on mise de l'argent, des jeux de casino. La plupart des ouvrages consacrés au calcul des probabilités rapportent cet épisode comme le point de départ de ce chapitre des mathématiques. Par exemple on peut lire sous la plume de Poisson, l'illustre spécialiste de physique mathématique de la première moitié du XIX^e siècle : « Un problème relatif aux jeux de hasard proposé à un austère janséniste par un homme du monde a été à l'origine du calcul des probabilités ».

L'un des problèmes, celui qui est rapporté le plus souvent mais auquel Pascal ne fait qu'une allusion en passant, est le suivant : combien de fois faut-il jeter deux dés pour avoir a priori au moins une chance sur deux d'obtenir un double six ? est-ce 24 ou 25 ? La solution est un exercice d'analyse combinatoire.

C'est le second problème du chevalier de Méré qui fut véritablement à l'origine du calcul des probabilités. Il est connu sous le nom de « problème des partis ». Mais peu de traités en donnent un exposé significatif. Une exception notable est Albert Jacquard qui donne un aperçu résumé dans son *Que Sais-Je « les Probabilités »* de 1974 ; le problème est rapporté en détail dans le livre de Todhunter, datant de 1865, et mentionné dans les exercices du traité de Remy. Pour ce problème Pascal établit ce qu'il appelle la « règle des partis », et envisage la rédaction d'un petit traité intitulé « Géométrie du Hasard ». Bien qu'il signale par avance ce travail dans son adresse à l'Académie Parisienne, académie fondée en 1635 par Mersenne, comme l'une de ses plus importantes

¹ Université de Bretagne Occidentale, Laboratoire de Mathématiques, Unité CNRS FRE 2218, 6 av. V. Le Gorgeu, B.P. 809, 29285 BREST
Mél : derrienn@univ-brest.fr

contributions à la science, Pascal ne rédigera jamais ce traité. Le 23 novembre 1654, deux mois tout juste après l'échange de correspondance avec Fermat, c'est la « nuit de feu » ou nuit du Mémorial. Pascal, alors âgé de trente et un ans, consacra les huit années qui lui restent à vivre presque exclusivement à ses réflexions mystiques ; il ne reviendra aux mathématiques que pour traiter le problème de la cycloïde dont il fera un argument de lutte contre les jésuites.

Aujourd'hui l'étude du travail de Pascal, exposé dans deux lettres à Fermat et dans le *Traité du triangle arithmétique*, présente un intérêt renouvelé (le triangle arithmétique est appelé aujourd'hui triangle de Pascal). Tout d'abord parce qu'il y apparaît la notion d'espérance mathématique, comme l'indiquent depuis longtemps les historiens du calcul des probabilités, mais aussi la notion d'espérance conditionnelle et la notion moderne de « martingale ». Cette notion, qui sera expliquée de façon simple plus loin, est considérée comme centrale dans le calcul des probabilités depuis les travaux de Paul Lévy, vers 1940, et ceux de J.L. Doob, vers 1950. Ce qui sera montré ici c'est que la « règle des partis » contient le premier exemple lumineux de martingale (et même de martingale arrêtée à un « temps d'arrêt » ou temps Markovien). De plus le raisonnement de Pascal est fondé sur une récurrence rétrograde qui est analogue à celle qu'il faut effectuer pour le calcul du prix d'une option sur le marché boursier. La célèbre formule de mathématiques financières, la formule de Black et Scholes, établie en 1973, repose sur un tel raisonnement. Pour cette formule Scholes et Merton, dont les idées étaient à l'origine de la formule, reçurent le prix Nobel d'économie en 1997, Black étant décédé peu auparavant.

I La règle des partis

Voici la situation : deux joueurs jouent à un jeu de pur hasard en plusieurs parties, chacun misant au départ 32 pistoles. La règle du jeu dit que le premier des deux qui aura remporté trois parties emportera la totalité du pot, soit 64 pistoles ; celui-ci aura donc gagné 32 pistoles alors que l'autre aura perdu 32 pistoles.

Le jeu n'est pas précisément désigné dans les écrits de Pascal, mais c'est un jeu de pur hasard c'est-à-dire qu'à chaque partie les deux joueurs possèdent la même chance de gagner. On peut penser que c'est un jeu de dés.

Une petite remarque de terminologie est ici nécessaire. Pascal parle des parties du jeu et du ou des partis à faire : le parti est le partage du pot ; les parties sont les manches successives. Pour la clarté de l'exposé il semble préférable de n'employer que les termes manche et partage et de ne plus parler de parti, au masculin ou au féminin, ce qui sera fait dans la suite.

Le problème posé est le suivant. Pour une raison inconnue les deux joueurs sont obligés de s'interrompre avant que l'un ou l'autre n'ait gagné trois manches ; par exemple le joueur A a gagné deux manches et le joueur B en a gagné une. Comment faut-il alors répartir le pot entre les deux joueurs ? Quel est le partage juste en cette circonstance ? Une solution satisfaisante au point de vue juridique serait de rendre à chacun ses 32 pistoles initiales puisque le contrat n'a pas été respecté. Ceci est banal et sans intérêt. Ce n'est évidemment pas de cela que Pascal et Fermat discutent. Ce qu'ils cherchent

c'est le partage fondé sur l'évaluation rigoureuse des chances de gain de chacun des joueurs.

Pour expliquer sa solution Pascal considère d'abord l'exemple déjà cité : le joueur A a gagné deux manches et le joueur B seulement une. Que devrait être la fortune de A à ce moment ? Et bien si la manche suivante avait été jouée, puisque le jeu est de pur hasard, il y aurait eu une chance sur deux pour chaque joueur de remporter cette manche additionnelle ; une chance sur deux donc pour que l'on se trouve dans la situation où A possède trois manches et B une, et aussi une chance sur deux pour que l'on se trouve avec égalité de A et B chacun ayant gagné deux manches. Dans le premier cas la règle du jeu donne le pot de 64 pistoles à A. Dans le second cas il faudrait jouer encore une manche et avec égalité des chances A ou B l'emporterait ; donc dans ce second cas la fortune de A doit être la moitié du pot, soit 32 pistoles. Puisque ces deux éventualités ont la même chance de se produire, la fortune de A à présent doit être la moyenne de ces deux sommes. Autrement dit dans l'exemple considéré le partage juste est :

- pour le joueur A, $(1/2)(64 + 32) = 48$ pistoles ;
- pour le joueur B, $64 - 48 = 16$ pistoles.

Aujourd'hui on dirait que la part de A est l'espérance mathématique de la variable aléatoire prenant les valeurs 64 et 32 avec la même probabilité $1/2$. Les historiens des mathématiques s'accordent en effet à reconnaître que la notion d'espérance mathématique est apparue pour la première fois dans ce raisonnement de Pascal, bien que l'expression elle-même, ni d'ailleurs le mot probabilité, n'apparaisse jamais dans ses écrits. Cette expression sera créée quelques années plus tard par Huygens, auteur du premier ouvrage publié consacré au calcul des probabilités, faisant référence à Pascal et au problème des partis.

Une fois cet exemple traité, Pascal présente la solution pour le cas où le joueur A possède deux manches et le joueur B aucune. Il obtient pour A, 56 pistoles et pour B, 8. De même pour le cas où A possède une manche et B aucune, il obtient pour A, 44 pistoles et B, 20. À chaque fois il opère comme dans le premier exemple : à partir des valeurs finales, 64 ou 0, il calcule de façon récursive les espérances mathématiques correspondant aux situations rencontrées en remontant vers le début du jeu. On peut dire qu'il effectue un raisonnement par récurrence « rétrograde ». Ce point essentiel sera repris dans la suite.

Pour comprendre complètement le raisonnement précédent, aujourd'hui, il est naturel de construire l'arbre binaire représentant a priori les différents résultats possibles des manches successives à jouer. Celui-ci est figuré en annexe I. La hauteur de cet arbre est cinq, car il ne sera jamais nécessaire de jouer plus de cinq manches en raison de la règle du jeu « trois manches gagnant ». Alors pour calculer la fortune du joueur A dans chaque situation c'est-à-dire en chaque embranchement de l'arbre, appelé aussi sommet de l'arbre même quand il n'est pas à l'extrémité, on doit partir des extrémités pour lesquelles les valeurs 64 ou 0 sont données par la règle du jeu, puis on doit faire les moyennes en remontant chaque branche jusqu'à la racine de l'arbre. Le passage des sommets de la 5^e génération à ceux de la 4^e obéit à la même règle que celui des sommets de la 4^e génération à ceux de la 3^e, etc. C'est pour cela que l'on peut parler

de récurrence, rétrograde car partant des valeurs finales on retrouve les valeurs initiales (voir figure en annexe I).

Dans sa lettre à Fermat du 29 juillet Pascal donne aussi un tableau des valeurs de chaque manche dans un tel jeu : voir l'annexe II. Dans une seconde lettre datée du 24 août il revient sur sa méthode et montre qu'elle s'applique aussi si les probabilités de gain à chaque manche sont différentes de $1/2$ ou s'il y a plus de deux joueurs. Sur ce point une controverse courtoise s'engage, mais Pascal retirera rapidement l'objection qu'il avait portée initialement au raisonnement de Fermat. L'exemple suivant est traité : trois joueurs A, B et C s'affrontent à un jeu de pur hasard en trois manches gagnant ; la mise initiale de chacun est 9 pistoles. Sachant que A a remporté deux manches, B et C chacun une, le partage juste du pot de 27 pistoles est le suivant : 17 pistoles pour le joueur A, 5 pistoles pour chacun des joueurs B et C. En annexe III est présenté l'arbre ternaire qui justifie ce résultat.

Dans le Traité du triangle arithmétique, la règle des partis est reprise de façon générale et exposée de façon systématique ; on pourrait presque dire « à la Bourbaki ». Dans un jeu de pur hasard à deux joueurs, le nombre de manches demandé pour gagner, fixé par la règle, étant un nombre entier N arbitraire, si le joueur A possède k manches et le joueur B, l manches, avec k et $l \leq N$, soit $f(k, l)$ la fraction du total du pot qui doit revenir au joueur A dans le partage. La fraction du joueur B est alors $1 - f(k, l)$. Le raisonnement par récurrence rétrograde impose aux nombres $f(k, l)$ la relation :

$$f(k, l) = \frac{1}{2}(f(k+1, l) + f(k, l+1)) \text{ si } k \text{ et } l < N.$$

La règle du jeu donne les « conditions aux limites » :

$$f(k, l) = 1 \text{ si } l < k = N \text{ et } f(k, l) = 0 \text{ si } k < l = N$$

qui sont les valeurs finales.

La solution est unique et vaut :

$$f(k, l) = 2^{-2N+k+l+1} \sum_{i=0}^{N-l-1} C_{2N-k-l-1}^i,$$

où C_N^j est le nombre de combinaisons d'ordre j de N éléments qui vaut $C_N^j = N!/j!(N-j)!$.

Pascal en fait la démonstration par récurrence, partant des valeurs finales et remontant vers la valeur initiale $f(0, 0)$, à l'aide de la formule qui est à la base du triangle arithmétique :

$$C_N^j + C_N^{j+1} = C_{N+1}^{j+1}.$$

Les détails de la démonstration sont laissés au lecteur à titre d'exercice. En fait Pascal ne dispose pas des notations qui viennent d'être utilisées ; il est contraint de se restreindre à des petites valeurs mais il le fait en montrant la complète généralité de son argument. En annexe IV sont présentés des extraits du Traité du triangle arithmétique contenant l'énoncé et la démonstration de la formule donnée ci-dessus.

Plusieurs auteurs ont jugé la solution de Pascal longue et estimé meilleure celle de Fermat fondée sur un calcul direct d'un nombre de combinaisons. Cependant il ne semble pas que Fermat ait donné une formule générale comparable à celle que l'on vient de rencontrer. D'autre part le style de Fermat est elliptique. Comme pour d'autres problèmes restés fameux il procède par affirmations et courtes indications ; le détail des raisonnements reste caché. Au contraire Pascal développe ; il énonce définitions, propositions, lemmes comme dans un traité du xx^e siècle (voir annexe IV). Mais surtout la solution de Pascal possède une valeur remarquable si on la compare aux idées actuelles du calcul des probabilités et des mathématiques financières.

Aujourd'hui, depuis les travaux de Paul Lévy, entre 1930 et 1950, ceux de J.L. Doob, entre 1940 et 1960, et ceux de nombreux autres mathématiciens, une notion très importante dans le calcul des probabilités est celle de « martingale ». Cette notion est couramment enseignée au niveau de la maîtrise de mathématiques. Et bien voici un exemple typique de martingale, en ce sens mathématique, donné par le tableau des valeurs $f(k, l)$ réparties sur les sommets de l'arbre binaire de hauteur $2N - 1$. Il s'agit d'ailleurs d'une martingale qui est, comme on dit, « arrêtée » au temps d'arrêt T qui vaut le nombre de manches jouées jusqu'au moment où la règle « N manches gagnant » stoppe le jeu ; c'est un nombre aléatoire a priori qui sera compris entre N et $2N - 1$. Au lecteur qui ignore ces développements du calcul des probabilités au xx^e siècle l'arbre de ces valeurs, présenté à l'annexe I, donne une idée valable de cette notion. Cet exemple de « martingale » sera appelé ici la martingale de Pascal. Le paragraphe V contiendra quelques indications mathématiques plus détaillées. On sera amené aussi à comparer le sens « mathématique » et le sens courant du mot martingale, c'est-à-dire celui du dictionnaire, suivant lequel une martingale est une stratégie pour gagner dans un jeu de hasard. Ne trouve-t-on pas sous la plume de Balzac : « Pour les ambitieux, Paris est une immense roulette et tous les jeunes gens croient y trouver une victorieuse martingale ».

La suite du présent article sera consacrée essentiellement à montrer que la règle des partis de Pascal est un premier exemple d'un raisonnement fondamental aujourd'hui dans les mathématiques financières qui utilisent les concepts probabilistes. Ceci demande un petit détour.

II Le problème imaginaire du chevalier de Méré : où l'on reparle de stratégie au jeu

Imaginons qu'un troisième problème ait été posé à Pascal par l'homme de jeu qu'était le chevalier de Méré. Deux joueurs Y et Z vont s'affronter dans un jeu d'adresse ou d'intelligence : Borg contre McEnroe au tennis ou Karpov contre Kasparov aux échecs, l'imagination autorisant tous les anachronismes. Le jeu doit se dérouler suivant la règle « trois manches gagnant », c'est-à-dire que le premier vainqueur de trois manches sera champion. Les bookmakers prennent les paris en faveur du joueur Y à « un contre un ». Le chevalier de Méré qui met toute sa confiance dans ce joueur souhaite déposer la mise de 32 pistoles, à un contre un donc, sur la victoire finale de celui-ci : ainsi le chevalier attend 64 pistoles à la victoire finale de son joueur préféré Y ; si, à sa surprise totale, Y est finalement vaincu il n'attend rien, c'est-à-dire zéro (la locution « x contre

un » signifie que pour la mise unité le parieur attend en cas de succès un gain égal à x plus le remboursement de sa mise, donc la somme totale $x+1$). Mais le bookmaker refuse de prendre ce genre de pari : il n'accepte que les paris déposés pour chaque manche individuellement. Le chevalier ne pourra donc miser à un contre un, en faveur de Y , que pour chaque manche tour à tour, la première, la seconde etc. Le chevalier se tourne alors vers Pascal et lui demande s'il est possible de calculer les valeurs des mises à déposer à chaque manche, au fur et à mesure que le championnat progresse, de façon à garantir le résultat qu'il souhaitait initialement : 64 pistoles si son préféré Y l'emporte finalement, 0 sinon. Il est bien entendu que le bookmaker ne fait pas crédit et que la fortune initiale du chevalier est 32 pistoles.

Ce problème n'a pas été posé à Pascal. Il aurait pu l'être.

Au premier abord il est naturel de douter qu'une telle stratégie de mise existe et une réponse de Pascal, déjà abandonné au mysticisme, aurait pu être la suivante : « Dans cette nouvelle situation le jeu est de pure adresse ou sagacité, aucun hasard n'intervient. Le vainqueur sera le meilleur en adresse ou sagacité. Aussi je ne peux que vous recommander de bien vous renseigner sur la forme physique et mentale de votre favori pour le jour du championnat. Ma "géométrie du hasard" n'a de prise que sur les jeux de hasard et ne peut vous éclairer en rien ».

Cette réponse que l'on pourrait qualifier de métaphysique, est sans profondeur ; on pourrait la dire triviale. On peut imaginer qu'elle n'aurait pas été celle de Pascal et qu'au contraire celui-ci aurait répondu au chevalier : « Pourquoi me posez-vous une deuxième fois le même problème ? Ne voyez-vous pas que la règle des partis que je vous ai déjà montrée, répond à votre demande ? En effet la stratégie de mise que vous cherchez existe. Reprenez la martingale définie auparavant pour le jeu de pur hasard. Fixez le montant de la mise à engager à un contre un en faveur de votre favori Y , pour la prochaine manche à jouer, en calculant la différence entre la valeur de ma martingale en l'état du jeu que vous connaissez déjà et la valeur qu'elle prendrait à l'issue de cette prochaine manche au cas où votre favori y serait vaincu. Alors vous obtiendrez avec certitude le résultat que vous souhaitiez initialement ».

En effet en suivant cette recommandation le parieur est sûr d'avoir dans sa poche à l'issue de chaque manche une fortune égale à la valeur de la martingale de Pascal. En annexe V les valeurs des mises ainsi calculées sont reportées sur l'arbre binaire. À l'issue du championnat, après le nombre T de manches nécessaire pour décider du résultat, qui est a priori un nombre incertain compris entre trois et cinq, la martingale prend la valeur 64 si Y est champion et 0 sinon : c'est le résultat souhaité initialement par le parieur.

L'habileté du parieur consiste à savoir économiser sur sa fortune. À la première manche il ne doit engager que 12..., mais s'il le faut au cours du jeu il doit être prêt à engager la totalité de la fortune qui lui reste. Par exemple si les trois premières manches ont donné les vainqueurs ZYZ , la fortune du parieur n'est plus que 16 ; mais il peut encore atteindre son but si son favori Y refait son retard et emporte les deux manches suivantes, à la condition d'engager à ce moment la totalité de son avoir (se reporter à l'annexe V). Il est facile de se convaincre que cette méthode de jeu pourrait s'appliquer dans des

situations plus générales : « douze manches gagnant », tournoi à plus de deux joueurs...

Il faut souligner que la stratégie du parieur ne peut être déterminée que par le raisonnement par récurrence rétrograde. La valeur à miser à la première manche ne peut pas être calculée en premier ; elle ne peut l'être qu'après le calcul des mises pour les manches suivantes en commençant par les dernières.

Enfin dans ce problème il apparaît clairement que la martingale de Pascal, suivant la terminologie introduite ci-dessus, peut être regardée comme une stratégie à suivre par un parieur dans un jeu de hasard pour atteindre un but déterminé. Mais ici ce but n'est pas toujours un gain garanti.

Avant d'entrer dans l'étude du prix d'une option, il est nécessaire de souligner encore que dans le problème qui vient d'être traité il n'y a objectivement aucune probabilité, aucun hasard à intervenir. Ni jeu de dé, ni pile ou face, ni loterie... Cependant la solution est la même que celle du jeu de pur hasard envisagé dans le paragraphe précédent. Supposer a priori que dans une situation déterministe mais incertaine à l'avance, la décision sera prise au sort suivant une règle de hasard, c'est entrer dans le domaine des probabilités « subjectives ». Cette démarche peut sembler paradoxale, surtout d'un point de vue positiviste. Mais pourtant c'est elle qui rend le calcul des probabilités et la statistique mathématique si fructueux dans de nombreux champs scientifiques. Cette discussion sera reprise dans la suite.

III Le prix d'une « option » : le problème de Bachelier ; le problème de Black et Scholes

Le marché des « options » s'est ouvert sur la place boursière de Paris vers 1986, sous la houlette de M. Pierre Bérégovoy, ministre des finances, dans le cadre de la modernisation du fonctionnement du système capitaliste qui s'opérait en France à cette époque. Il avait débuté à Chicago en 1973, l'année de la publication de la plus célèbre formule de ce qu'on appelle aujourd'hui « mathématiques financières », la formule de Black et Scholes. Cette formule a pour objet le calcul du prix d'une option. Ce que tente de montrer la suite du présent article c'est qu'il existe un lien profond entre cette formule, qui sera écrite plus loin, et la « règle des partis » de Pascal, expliquée ci-dessus.

Tout d'abord qu'est ce qu'une option ? La réponse complète serait longue et prendrait de multiples formes. Pour le raisonnement qui est en vue, un seul exemple est suffisant. Nous allons considérer un exemple d'une option d'achat de type européen sur le marché des devises, dans un cas très simplifié.

Voici l'exemple. Il y a deux devises en présence : la pistole et l'écu. Le cours de l'écu contre la pistole varie au cours du temps. Ce cours est fixé chaque jour à midi ; d'un midi au suivant il est constant. Un certain lundi à midi un écu vaut exactement une pistole. Pierre et Jean vivent au royaume de la pistole. Pierre est entrepreneur et sait qu'il aura besoin de 32 écus le jeudi après-midi suivant, donc dans trois jours, pour régler une commande. Jean est agent de change ; il peut réaliser les opérations financières librement, il peut en particulier emprunter de l'argent d'un jour à l'autre à un certain taux d'intérêt qui est fixe. Ce lundi Jean propose à Pierre un contrat suivant lequel il s'engage à lui vendre jeudi après-midi 32 écus au cours présent, c'est-à-dire

pour 32 pistoles, au cas où Pierre le lui demanderait. Il est évident que si le jeudi le cours de l'écu avait baissé depuis lundi, Pierre pourrait se procurer les 32 écus nécessaires pour moins de 32 pistoles directement sur le marché et il n'aurait donc aucun intérêt à demander l'exécution du contrat. Pierre ne demandera donc à Jean l'exécution du contrat que si on constate le jeudi une hausse du cours de l'écu par rapport au cours du lundi.

En raison de cette possibilité de choix un tel contrat est appelé une « option ». Dans le présent exemple il s'agit d'une option d'achat sur le cours de l'écu, dont le prix d'exercice est une pistole pour un écu et dont le délai d'exercice est fixé à trois jours. Quand le délai d'exercice est ainsi fixé a priori, on dit que l'option est de type européen.

Le problème est alors le suivant : à quel prix est-il raisonnable pour Pierre de passer un tel contrat, autrement dit d'acheter une telle option ? Ou bien à quel prix est-il raisonnable pour Jean de vendre une telle option à Pierre ? Ce problème se décompose en deux questions essentiellement différentes.

La première de ces deux questions porte seulement sur la nature des variations du cours de l'écu. Dans le problème il est admis que nul n'est devin et donc nul ne peut prédire avec certitude le lundi ce que sera le cours de l'écu le jeudi. Il est admis aussi que les décisions de Pierre et Jean ne peuvent pas influencer les variations de ce cours. Cependant on peut concevoir qu'en s'appuyant sur la connaissance des variations dans le passé il soit possible de connaître le lundi les valeurs du cours qui seront possibles le jeudi, en quelque sorte une fourchette de valeurs possibles, avec aussi peut-être une indication sur les vraisemblances respectives de ces valeurs dans la fourchette. Comment établir une telle fourchette de valeurs possibles pour le cours de l'écu pour le jeudi suivant, avec une pondération des vraisemblances ? Telle est la première question. Le premier à l'avoir abordée avec un certain succès a été Louis Bachelier vers 1900. Il a eu l'idée de comparer l'évolution d'un cours en bourse à celle d'une quantité qui subirait constamment des accroissements aléatoires indépendants et distribués suivant une loi normale ou gaussienne ; ce processus stochastique s'est révélé être celui du « mouvement brownien ». Depuis lors cette question a fait l'objet d'innombrables études et modélisations, utilisant les ressources de la statistique mathématique et de la théorie des processus stochastiques. Mais ce n'est pas cela le sujet du présent article, aussi pour cette première question qu'il semble justifié d'appeler le problème de Bachelier, le lecteur est renvoyé aux références données en bibliographie.

La seconde question est alors la suivante : en supposant que les variations possibles du cours durant les trois jours à venir soient connues le lundi, comment faut-il calculer le prix de l'option ? Attention les variations sont seulement connues dans leur ensemble, nul ne peut prédire laquelle des variations possibles aura effectivement lieu. Ainsi dans l'exemple introduit ci-dessus, on va supposer que le cours de l'écu peut varier chaque jour de 50% à la hausse ou à la baisse, c'est-à-dire qu'il peut être multiplié par un facteur égal à $3/2$ ou $1/2$. Alors les valeurs possibles du cours pour le jeudi sont les 4 nombres $(3/2)^3 = 27/8$, $(3/2)^2(1/2) = 9/8$, $(3/2)(1/2)^2 = 3/8$, $(1/2)^3 = 1/8$ (prix en pistoles d'un écu). Comment faut-il dans ce cas calculer le prix de l'option que Pierre se propose d'acheter à Jean ? L'originalité principale que l'on reconnaît au travail

de Black et Scholes porte sur la réponse qu'ils ont apportée à cette seconde question. Cette question sera donc appelée ici le problème de Black et Scholes.

En résumé le problème posé initialement du calcul du prix de l'option a été décomposé en deux : d'une part le problème de Bachelier qui est un problème de statistique et de modélisation de l'évolution d'un cours boursier ; d'autre part le problème de Black et Scholes qui va se révéler comme un problème de pur raisonnement comparable aux problèmes du chevalier de Méré.

IV La solution du problème de Black et Scholes : où l'on reparle de la règle des partis

Cette solution sera exposée seulement dans le cadre de l'exemple introduit au paragraphe précédent, avec les choix des valeurs numériques posés et avec aussi la supposition que le vendeur Jean peut emprunter au taux d'intérêt constant égal à 0%. Cette supposition n'est pas réaliste mais l'exposé du raisonnement est plus simple dans ce cas ; de plus par une méthode de changement de coordonnées, tout à fait classique en mathématiques, le cas où le taux est positif s'y ramène. Bien entendu toute somme empruntée doit être finalement, intégralement remboursée.

L'évolution du cours de l'écu contre la pistole entre le lundi et le jeudi se représente naturellement comme un arbre binaire de hauteur 3. Celui-ci est figuré dans l'annexe VI. Les valeurs du cours dans chaque éventualité sont attachées aux différents embranchements de l'arbre. Elles forment de façon évidente une martingale analogue à la martingale de Pascal. Ceci est dû au choix des deux facteurs $3/2$ et $1/2$, et peut sembler particulier, mais en fait ne l'est pas : pour d'autres valeurs il faudrait comparer à une martingale de Pascal correspondant au cas d'un jeu qui n'est pas de pur hasard (voir le paragraphe V). Ici la martingale s'arrête au temps fixe 3 et non plus en un temps aléatoire T comme dans le problème du chevalier.

Le jour d'exercice de l'option, c'est-à-dire le jeudi, Pierre acheteur de l'option se trouvera devant un choix : exercer ou pas son option.

Ou bien le cours de l'écu aura monté et pour se procurer les 32 écus qui lui sont nécessaires il exercera l'option en demandant à Jean de les lui vendre pour 32 pistoles, suivant les termes du contrat, ce qui lui donnera un gain par rapport au prix du marché le jeudi. Ce gain sera de $32(C-1)$ pistoles où C représente le cours de l'écu le jeudi. Ce gain se réalise aux dépens de Jean pour qui donc la perte, le jeudi, sera de $32(C-1)$ pistoles.

Ou bien le cours de l'écu aura baissé, alors l'intérêt de Pierre est de ne pas exercer l'option et d'acheter ses 32 écus directement sur le marché au cours du jour. Dans ce cas Jean n'est pas sollicité et n'assume aucune perte.

Les valeurs représentant les pertes de Jean, vendeur de l'option, le jeudi dans les différentes éventualités sont indiquées sur l'arbre en annexe VI. Elles vont de zéro à 76 pistoles dans le cas où l'écu n'aurait subi que des hausses.

Pour établir le prix à demander le lundi pour l'option le vendeur, Jean, cherche un montant x en pistoles à demander à Pierre qui lui permettrait de suivre une stratégie de change et d'emprunt, entre le lundi et le jeudi, lui garantissant de disposer finalement, le jeudi, dans tous les cas, de la valeur de la perte qu'il doit éventuellement assumer ce jour. Tout d'abord il est naturel

de douter de l'existence d'un tel nombre x . On conviendra cependant que s'il existe, alors ce nombre x a de fortes prétentions au qualificatif de « juste » prix pour l'option.

Et bien ce nombre existe et pour le découvrir il faut de nouveau suivre un raisonnement par récurrence rétrograde. La fortune que doit posséder Jean le jeudi dans chaque éventualité devrait égaler sa perte contre Pierre : ces valeurs sont connues, elles sont indiquées sur l'arbre de l'annexe VI. Quelle fortune devrait-il alors posséder le mercredi, pour que seulement par des opérations d'emprunt ou de change, il soit certain d'avoir le jeudi la fortune requise ? La réponse est donnée par la martingale de Pascal calculée à partir des valeurs finales connues. Pour le voir, on considère l'éventualité où le mercredi le cours de l'écu est $9/4$ (voir annexe VI) ; alors la valeur de la martingale est $(1/2)(76 + 4) = 40$. Si Jean possède 40 pistoles ce mercredi, il peut emprunter 32 pistoles, puis changer en écus ses 72 pistoles. Le lendemain si le cours de l'écu a monté il aura en changeant à nouveau $(3/2)72 = 108$ pistoles. Il pourra rembourser l'emprunt de 32 pistoles et il lui restera la fortune requise $108 - 32 = 76$ pistoles. Si le cours a baissé il aura $(1/2)72 = 36$ pistoles, il pourra rembourser l'emprunt de 32 pistoles et comme dans le cas précédent il lui restera la fortune requise $36 - 32 = 4$ pistoles. Cette coïncidence n'est évidemment pas fortuite ; on a cherché un nombre y qui soit simultanément solution des deux équations linéaires :

$$\begin{aligned}(3/2)(40 + y) &= 76 + y \\ (1/2)(40 + y) &= 4 + y.\end{aligned}$$

Cette solution existe et vaut $y = 32$, car la valeur $40 = (1/2)(76 + 4)$ est celle de la martingale dans ce cas. Toute autre valeur aurait conduit à une impossibilité. Le raisonnement qui vient d'être fait peut être répété pour le mercredi dans chacune des trois autres éventualités, et ainsi les valeurs requises de la fortune de Jean sont connues pour le mercredi dans tous les cas. On répète alors par récurrence le même raisonnement pour remonter du mercredi au mardi, puis du mardi au lundi. Ainsi le nombre x cherché doit être la valeur prise à la racine de l'arbre par la martingale correspondant aux valeurs finales posées au début. Ici c'est évidemment la moyenne arithmétique de ces valeurs finales :

$$x = \frac{1}{8}(76 + 4 + 4 + 0 + 4 + 0 + 0 + 0) = 11.$$

En résumé, si Jean, vendeur de l'option, dispose de $x = 11$ pistoles le lundi, il peut suivre la stratégie d'emprunt et de change guidée par la martingale et dont les valeurs sont portées sur l'arbre en annexe VI. Alors il est certain de pouvoir finalement assumer sa perte éventuelle vis-à-vis de Pierre, l'acheteur de l'option, et rembourser ses emprunts. Donc le prix qu'il doit demander à Pierre doit être cette valeur (ou une valeur supérieure) s'il ne veut pas risquer de perte. En demandant un petit supplément à titre de frais de dossier, il peut obtenir un bénéfice.

L'avantage de Pierre, acheteur de l'option, est d'une nature différente. Il s'est garanti, en payant $x = 11$ pistoles le lundi, contre l'éventualité d'avoir à déboursier 108 pistoles le jeudi pour acquérir les 32 écus dont il a besoin. Il aura

finalement dépensé au plus $11 + 32 = 43$ pistoles, et ainsi, peut-être aura-t-il évité la faillite. Sa motivation est comparable à celle d'un souscripteur d'une assurance. Par contre, comme on l'a vu, Jean ne court aucun risque; chaque option qu'il vent au prix calculé par la méthode expliquée ci-dessus, s'équilibre d'elle-même. La démarche du vendeur de l'option n'a donc rien à voir avec celle d'un assureur qui, lui, espère compenser les pertes causées par les sinistres à couvrir, importantes mais peu nombreuses, par les très nombreuses primes encaissées.

Peut-on estimer le gain global ou moyen de Pierre? A posteriori la question n'a pas de sens. Le cours de l'écu le jeudi a déterminé la dépense exacte de Pierre au cours de l'opération. C'est a priori que la question se pose. Autrement dit, on demande quelle est l'espérance mathématique de gain de Pierre. Mais cette question a-t-elle un sens? Comme dans le problème imaginaire du chevalier de Méré, il n'y a ici aucun hasard objectif; les différentes éventualités du jeudi ne sont pondérées d'aucune probabilité et le calcul d'une espérance mathématique n'est pas possible. Poser des valeurs pour les probabilités de ces éventualités reviendrait à construire un modèle probabiliste pour l'évolution du cours de l'écu et ramènerait donc au problème de Bachelier expliqué au paragraphe précédent. Cependant il est évident que si l'on suppose les fluctuations du cours soumises à un pur hasard, donc des probabilités égales pour la hausse et la baisse, alors l'espérance de gain de Pierre est nulle. Cette valeur nulle est inhérente au raisonnement expliqué ci-dessus, que l'on peut donc comprendre comme fondé sur l'usage de probabilités subjectives supposées équiréparties sur les évolutions du cours de l'écu. Pour des hausses ou baisses différentes de plus ou moins 50%, il faudrait utiliser des nouvelles valeurs de ces probabilités subjectives; celles-ci devraient être choisies de façon que l'évolution du cours forme encore une martingale.

La méthode de la récurrence rétrograde inventée par Pascal pour établir la règle des partis permet donc de résoudre aussi bien les problèmes réel ou imaginaire du chevalier de Méré que le problème de Black et Scholes. En fait le problème imaginaire, présenté au paragraphe II, et celui du prix de l'option ne forment qu'un seul problème; la seule différence est que dans le premier le bookmaker ne fait pas crédit alors que dans le second l'emprunt est possible. Une autre différence apparente est due aux valeurs numériques utilisées; mais le raisonnement est en réalité indépendant du choix de ces valeurs comme on l'a indiqué brièvement et comme on peut le vérifier en détail facilement.

V La martingale de Pascal : quelques développements mathématiques

Revenons au problème du chevalier de Méré, exposé au paragraphe I, dans le cas général où la règle du jeu dit « N manches gagnant » et où le montant des mises est quelconque.

Numérotions les manches jouées successivement : $1, 2, \dots, t, \dots, 2N - 1$. C'est le temps qui s'écoule par instants discrets. À la t^e manche, une fois celle-ci jouée, l'état du jeu est le mot X_t écrit avec les deux lettres A et B, de longueur t , qui indique les vainqueurs successifs depuis le début du jeu. Ce mot est aléatoire, parmi les 2^t mots possibles. La fortune du joueur A à l'issue de

la t^{e} manche est S_t une variable aléatoire numérique qui est déterminée par X_t . Le nombre de manches qui seront effectivement jouées, la règle étant « N manches gagnant », est aussi a priori un nombre aléatoire; notons le T . Il doit vérifier : $N \leq T \leq 2N - 1$, avec une probabilité égale à 1. Ce qui importe c'est évidemment l'état du jeu et la fortune de A avant et jusqu'à l'instant T . Autrement dit ce que l'on cherche c'est la valeur de la suite S_1, S_2, \dots, S_T , ce que l'on peut noter $(S_{T \wedge t})_{1 \leq t \leq 2N-1}$, où $a \wedge b$ désigne le plus petit des deux entiers a et b . La relation sur laquelle Pascal s'appuie pour établir la règle des partis est :

$$S_{T \wedge t} = E \{ S_{T \wedge (t+1)} \mid X_{T \wedge t} \}.$$

Ce symbole désigne l'espérance de la variable aléatoire $S_{T \wedge (t+1)}$ sachant le mot aléatoire $X_{T \wedge t}$; c'est l'espérance de la valeur de la fortune du joueur A à l'instant suivant $t + 1$, conditionnellement à la connaissance de l'état du jeu à l'instant présent t . Depuis une cinquantaine d'années une suite de variables aléatoires vérifiant une telle relation est appelée une « martingale »; ici la suite $(S_{T \wedge t})_{1 \leq t \leq 2N-1}$ est une « martingale relativement à la suite $(X_{T \wedge t})_{1 \leq t \leq 2N-1}$ ». Puisqu'ici la martingale est arrêtée au temps T qui est borné, sa valeur au temps t est donnée par :

$$S_{T \wedge t} = E \{ S_T \mid X_{T \wedge t} \}$$

c'est-à-dire par l'espérance conditionnelle de la variable terminale S_T sachant l'état du jeu $X_{T \wedge t}$ au temps t .

Cette construction utilise de façon essentielle le fait que le temps aléatoire T , le nombre de manches effectivement jouées, est ce qu'on appelle un temps d'arrêt ou un temps markovien. Ceci signifie que lorsque ce temps arrive il est possible aussitôt de s'en apercevoir : ici lorsqu'un joueur gagne sa N^{e} manche avant l'autre il le sait sur l'instant, une manche supplémentaire est inutile. Une règle de jeu obéit toujours à ce principe qui peut sembler aller de soi. Mais imaginons, par exemple le temps $T' = T - 1$ défini par le nombre de manches effectivement jouées moins une; quand ce temps arrive on ne peut pas s'en apercevoir, dans le cas où il est inférieur à $2N - 2$, et jouer encore une manche est indispensable.

Pour approfondir encore cette mise en forme du problème des partis on peut préciser l'espace des épreuves ou univers sur lequel on se place : c'est l'ensemble Ω formé des mots de longueur $2N - 1$, écrits avec les deux lettres A et B. Cet ensemble a 2^{2N-1} éléments qui s'identifient aux branches de l'arbre binaire sous-jacent (voir annexe I). Les variables aléatoires T et X_t se définissent de façon évidente comme des fonctions définies sur cet ensemble : $X_t(\omega)$ est le mot de longueur t écrit au début du mot $\omega \in \Omega$. La connaissance de X_t détermine les valeurs précédentes X_0, \dots, X_{t-1} .

On peut vérifier facilement qu'un temps d'arrêt relatif à la suite $(X_t)_{0 \leq t \leq 2N-1}$ est toujours associé à une « coupure » de l'arbre binaire Ω . On appelle ainsi un sous-ensemble de Ω qui rencontre chaque branche de l'arbre une fois et une seule. Quand un tel sous-ensemble est choisi, on peut alors distribuer des valeurs numériques sur ses éléments (les sommets de l'arbre qui lui appartiennent) de façon arbitraire et ensuite former la martingale correspondante en calculant en chaque sommet antérieur à la coupure l'espérance conditionnelle des valeurs distribuées. Pour le lecteur qui sait qu'une fonction harmonique est

une fonction définie dans un domaine du plan qui prend en chaque point une valeur égale à sa moyenne sur tout cercle centré en ce point, il n'est pas difficile de voir ici une analogie avec la solution du problème classique de Dirichlet. En effet ce problème consiste à chercher la fonction harmonique dans un disque connaissant ses valeurs au bord. Depuis 50 ans les liens entre martingales et fonctions harmoniques n'ont cessé de s'approfondir.

Tout ce qui vient d'être exposé est valide quand le jeu est supposé de pur hasard ou quand il ne l'est pas. Il est donc naturel d'introduire un paramètre réel p , avec $0 < p < 1$, représentant la probabilité a priori du joueur A de gagner une manche. Ce paramètre détermine une unique mesure de probabilité sur l'espace Ω pour laquelle les manches sont indépendantes. Alors la martingale correspondant aux valeurs finales 1 quand le joueur A gagne le tournoi suivant la règle « N manches gagnant » et 0 sinon, s'écrit : $M_t = f(X_{T \wedge t})$ où f est la fonction numérique ne dépendant que des nombres k de lettres A et l de lettres B que le mot $X_{T \wedge t}$ comporte, suivant la formule :

$$f(k, l) = \sum_{i=0}^{N-l-1} C_{2N-k-l-1}^i (1-p)^i p^{2N-k-l-i-1} \text{ si } k \text{ et } l < N,$$

les valeurs finales étant $f(k, l) = 1$ si $l < k = N$ et $f(k, l) = 0$ si $k < l = N$. Les formules précédentes généralisent de peu celles données par Pascal lui-même comme on l'a expliqué à la partie I. La martingale M_t , avec $0 \leq t \leq 2N - 1$, représente la fraction du pot qui devrait revenir au joueur A en cas d'interruption prématurée du tournoi, comme dans le problème du chevalier de Méré.

Il est donc justifié de proposer d'appeler cette martingale, « martingale de Pascal » de paramètre p . Il semblerait aussi naturel de se référer à cet exemple dans une introduction à la notion de martingale en particulier si l'on veut donner une perspective historique.

VI Remarques finales

a) sur les mathématiques financières

À ce point le lecteur peut légitimement se demander ce qu'est la formule de Black et Scholes si souvent citée mais pas encore écrite une seule fois. En fait cette formule n'est pas unique : elle peut prendre de multiples formes. Dans la situation la plus simplifiée, correspondant à l'exemple étudié au paragraphe IV, elle s'exprime par l'intégrale :

$$x = \frac{2S}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{(\sigma\sqrt{t})/2} e^{-(s^2/2)} ds.$$

Ici x désigne le prix de l'option comme ci-dessus ; t est le délai d'exercice de l'option, le temps étant supposé varier continûment ; S est le prix initial de la devise ou de l'actif sur lequel porte l'option. Le prix d'exercice de l'option, qui est souvent noté K , et le taux d'intérêt mathématique, souvent noté r , n'apparaissent pas ici car, pour simplifier, comme dans l'exemple du paragraphe 4, il est supposé que $K = S$ et que $r = 1$. Enfin σ est un paramètre qui quantifie

la variabilité possible de l'actif sous-jacent. On reconnaît évidemment la loi normale réduite de densité $(e^{-(s^2/2)})/\sqrt{2\pi}$, appelée aussi loi de Laplace-Gauss ou loi de Gauss.

En fait la formule précédente repose à la fois sur le raisonnement du paragraphe IV et sur une modélisation probabiliste du cours de l'actif. Le passage du résultat obtenu en temps discret à la formule correspondant au temps continu, est dû à Cox et Rubinstein. Ce passage utilise le théorème de convergence vers une loi Gaussienne, appelé aussi théorème limite central du calcul des probabilités, appliqué aux variations successives du cours de l'actif sous-jacent supposées stochastiquement indépendantes. Cette supposition n'était en rien nécessaire pour le raisonnement du paragraphe IV. En d'autres termes, on suppose que les cotations peuvent avoir lieu à tout instant et on fait la modélisation probabiliste consistant à représenter a priori les variations du cours de l'actif par le processus le plus simple dont les trajectoires soient continues et cependant les accroissements indépendants, à savoir le processus du mouvement brownien. Les axiomes de ce processus ont été posés par Einstein en 1905 ; ils avaient été entrevus par Bachelier en 1900 justement dans le but d'une telle modélisation boursière. La construction mathématiquement rigoureuse de ce processus a été faite par Wiener en 1921. Le paramètre σ de la formule fait partie de la modélisation.

À toute autre modélisation correspond une autre version de la formule de Black et Scholes, mais le raisonnement justifiant le calcul du prix x reste le même. C'est celui expliqué au paragraphe IV, celui de la règle des partis de Pascal. Bien entendu la supposition que le vendeur de l'option est libre d'emprunter et de déplacer les valeurs de son porte-feuille, est essentielle pour la formule à temps continu comme elle l'était au paragraphe IV. Ne dit-on pas, d'ailleurs, que Tobin est aujourd'hui opposé à l'instauration de la taxe qui porte son nom en raison de la perte de liberté que celle-ci entraînerait et qui s'opposerait au fonctionnement rationnel de la bourse régi par la formule de Black et Scholes ?

Le problème de la modélisation du cours de l'actif, celui appelé au paragraphe III problème de Bachelier, est très difficile et passionnant de multiples points de vue.

Même sans parier pour le sens de l'histoire, comme le personnage de Rohmer de l'annexe VII dont nous parlerons plus loin, on peut trouver paradoxal de supposer les actions humaines surgissant du hasard. Mais cette objection n'est pas nécessairement profonde ; comme on l'a vu les probabilités subjectives peuvent nous aider même dans les situations déterministes !

Souvent aussi pour justifier leur modèle probabiliste des auteurs invoquent le grand nombre des agents économiques et leur indépendance. Mais dans le contexte du mouvement brownien un grand nombre est de l'ordre de 10^{23} , l'ordre de grandeur du nombre d'Avogadro. Dans le contexte économique qu'est ce qu'un grand nombre ? À combien peut-on estimer le nombre d'agents qui contribuent de façon non négligeable à l'établissement d'un cours boursier ?

L'étude statistique des cours du passé doit aussi nous éclairer. Mais l'interprétation d'une série temporelle demande, sous une forme ou une autre, une

hypothèse de stationnarité, c'est-à-dire une hypothèse suivant laquelle la loi probabiliste qui régira le futur est similaire à celle qui a régi le passé.

Vaste domaine de réflexion dans lequel nous n'irons pas plus loin. Cependant il nous semble indispensable pour comprendre de séparer modélisation et raisonnement ; problème de Bachelier et problème de Black et Scholes. Ceci n'est pas toujours fait de manière satisfaisante.

Par exemple pour rédiger les paragraphes III et IV, l'auteur s'est servi de l'excellent livre de Cox et Rubinstein « Options markets », datant de 1985 ; dans ce livre (page 178) la formule de Black et Scholes est posée d'abord dans un problème à temps discret, comme au paragraphe IV ci-dessus. Cox et Rubinstein sont d'ailleurs connus comme les initiateurs de cette approche. Puis la formule classique, celle que nous venons d'écrire, apparaît (page 205). Le passage de l'une à l'autre relève de l'art du passage à la limite que les mathématiciens cultivent depuis trois siècles ; il utilise le théorème limite central du calcul des probabilités. Mais entre les deux formules il y a une grande différence ; elles ne se situent pas sur le même plan ; dans la première aucun hasard, aucune probabilité ; dans la seconde, le modèle brownien est postulé, et donc une certaine forme d'indépendance stochastiques des variations successives du cours de l'actif. Les explications des auteurs, prenant plusieurs pages, sont claires, mais un lecteur pressé, ne lisant que les formules encadrées, pourrait manquer cette différence essentielle.

b) sur Pascal et l'argument du Pari

Il est difficile de parler de Pascal et de son travail fondateur du calcul des probabilités sans dire un mot du fameux argument du Pari. Le Pari de Pascal, pièce inaltérable de la culture classique française, est mentionné dans tous les dictionnaires et expliqué dans tous les manuels de littérature distribués aux lycéens. Plutôt que de reprendre cette fameuse page... « *partout où est l'infini et où il n'y a pas infinité de hasard de perte contre celui de gain il n'y a point à balancer, il faut tout donner* »... nous préférons citer l'intéressante interprétation du pari inventée par Rohmer en 1969 (voir annexe VII). Celle-ci a l'avantage de dégager l'argument de l'idée de paradis « *infinité de vie infiniment heureuse à gagner* » qui semble désuète aujourd'hui. La page du Pari apparaît dans les Pensées, c'est-à-dire dans le recueil des ébauches et brouillons préparés en vue d'une Apologie du christianisme. Le recueil et le classement des papiers laissés par Pascal ont été réalisés après sa mort par ses proches. Depuis lors parler de la fondation du calcul des probabilités par Pascal n'a jamais cessé d'évoquer aussitôt, et chez les mathématiciens aussi, l'argument du Pari.

De nombreux auteurs, croyant ou non, ont critiqué cet argument. Plusieurs historiens des sciences ont d'ailleurs exprimé leur regret que Pascal ait abandonné son travail scientifique si remarquable pour des réflexions mystiques. Il semble pourtant juste de souligner aujourd'hui que l'entreprise de l'Apologie du christianisme n'était pas, à son époque, un projet conformiste et bigot. En 1654 la question religieuse est l'une des questions principales de la vie sociale. Le traité de Westphalie mettant une fin de compromis aux guerres de religion en Europe a été signé en 1648. Bien qu'ils ne soient pas hors de l'église catholique, les jansénistes reprennent plusieurs thèses du calvinisme. Cela leur

vaut l'hostilité des jésuites qui forment la brigade d'élite du catholicisme romain contre les idées de la Réforme. L'Édit de Nantes est encore en vigueur, cependant la répression contre les protestants est vive. Après sa majorité en 1661, Louis XIV ne fera qu'aggraver ce processus jusqu'à la révocation en 1685 de l'Édit d'Henri IV, l'exil pour les protestants, les dragonnades...

Mais que vaut du point de vue du raisonnement l'argument du Pari? Il semble bien que l'espérance de gain de l'incroyant ne soit rien d'autre que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire qui prend certes une valeur infinie mais ceci avec une probabilité nulle! Sur ce point c'est le petit ingénieur catholique mis en scène par Rohmer qui a raison (voir l'annexe VII) : « l'argument ne vaut rien... ».

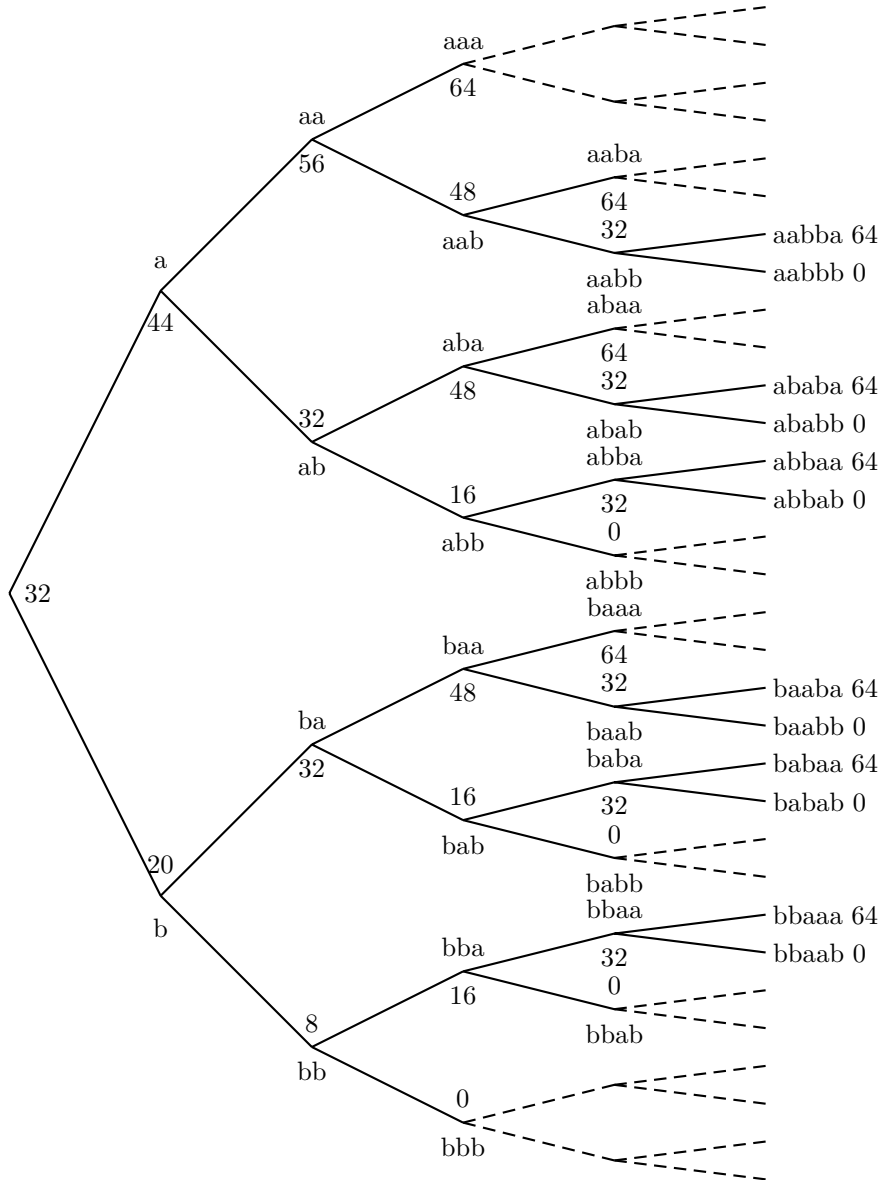
Bien entendu il n'y a pas de règle mathématique universelle justifiant l'affirmation « l'infini multiplié par zéro égale zéro ». Mais dans le présent contexte cette affirmation est valide et ne relève pas d'une convention. Pour le comprendre on peut penser au problème de la valeur de l'aire d'une droite tracée dans le plan. Cette droite forme un rectangle de longueur infinie et de largeur nulle. Son aire doit être posée égale à zéro car il est possible de la recouvrir par une suite infinie dénombrable de rectangles non dégénérés, c'est-à-dire de largeurs et longueurs positives et finies, dont la somme totale des aires est arbitrairement petite. On vient de se référer à la notion d'ensemble négligeable au sens de Lebesgue, établie il y a cent ans, pour montrer que l'argument du Pari ne donne qu'une espérance de gain nulle à l'incroyant! À l'époque de Pascal les conceptions de l'infini étaient évidemment loin d'être aussi avancées.

Dans leur pamphlet de 1997 intitulé « Impostures intellectuelles », Sokal et Bricmont dénoncent des transpositions abusives et triviales de certains concepts scientifiques effectuées par quelques grands noms contemporains de la philosophie et des sciences humaines. En transposant les notions de probabilité et d'espérance mathématique dans une discussion de l'existence de dieu et de la foi, Pascal tombe aussi sous cette critique; le paradoxe étant qu'à son époque il était l'homme qui comprenait le mieux ces notions scientifiques. Il est permis d'imaginer que s'il avait pu mener à bien lui-même son ouvrage, Pascal n'y aurait pas gardé cette page du Pari dépourvue de rigueur.

Même si l'on ne partage pas l'opinion qui vient d'être exprimée, on peut s'accorder avec l'auteur du présent article, pour reconnaître que le travail fondateur du calcul des probabilités dû à Pascal ne doit pas être masqué par l'écran de l'argument du Pari, et qu'il mérite encore aujourd'hui non seulement d'être cité mais d'être compris.

Annexe I

La règle des partis.



En chaque sommet de l'arbre est indiquée la part revenant au joueur a. Cet arbre de valeurs forme une martingale, qu'on pourrait appeler « martingale de Pascal ».

Annexe II

TABLE
DONT IL EST FAIT MENTION DANS LA LETTRE PRECEDENTE

Si on joue chacun 256, en

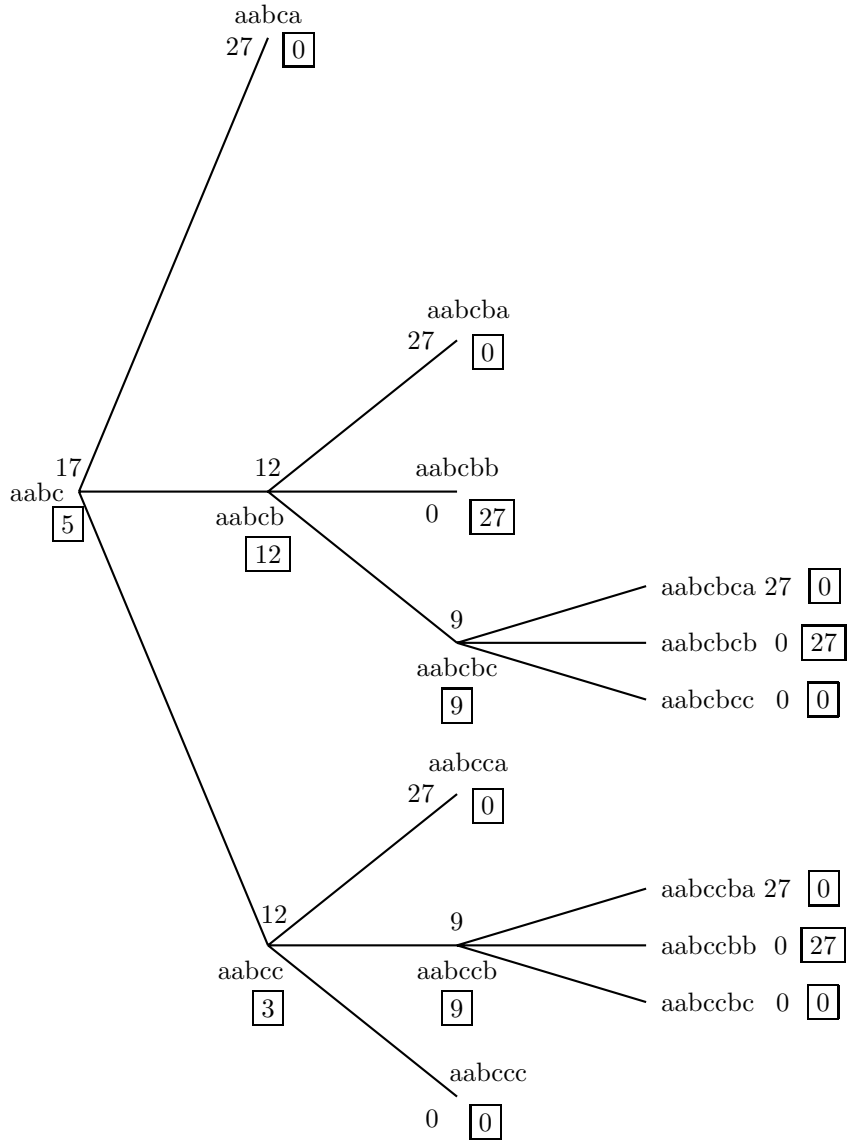
Il m'appar- tient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la		6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie
	1 ^{re} partie	63	70	80	96	128	256
	2 ^e partie	63	70	80	96	128	
	3 ^e partie	56	60	64	64		
	4 ^e partie	42	40	32			
	5 ^e partie	24	16				
6 ^e partie	8						

Si on joue 256, chacun, en

Il m'appar- tient sur les 256 pistoles de mon joueur, pour		6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie
	la 1 ^{re} partie	63	70	80	96	128	256
	les 2 1 ^{res} parties	126	140	160	192	256	
	les 3 1 ^{res} parties	182	200	224	256		
	les 4 1 ^{res} parties	224	240	256			
	les 5 1 ^{res} parties	248	256				
les 6 1 ^{res} parties	256						

Annexe III

Jeu à 3 joueurs a, b, c. Mise initiale de chacun 9.



Règle des partis pour a : chiffres non encadrés.

Règle des partis pour b : chiffres encadrés.

On part de la situation où a possède 2 manches, b et c chacun 1. Le jeu est de pur hasard.

Annexe IV

	1	2	3	4	5	6	7	L 8	9	10
1	Γ	σ	π	λ	μ	δ	ζ			
2	φ	ψ	θ	R	S	N				
3	A	B	C	ω	ξ					
4	D	E	F	P	Y					
5	H	M	K							
6	P	Q								
7	V									
8	T									
9										
10										

Rangs perpendiculaires

Rangs parallèles

Triangle Arithmétique

Le triangle arithmétique, tel que présenté par Pascal.

Annexe IV

Dans le 1^{er} alinéa Pascal énonce la formule de la page 48

$$f(k, l) = 2^{-2N+k+l+1} \sum_{i=0}^{N-l-1} C_{2N-k-l-1}^i.$$

PROBLÈME I - PROPOSITION I

Étant proposés deux joueurs, à chacun desquels il manque un certain nombre de parties pour achever, trouver par le Triangle arithmétique le parti qu'il faut faire (s'ils veulent se séparer sans jouer), eu égard aux parties qui manquent à chacun.

Soit prise dans le triangle la base dans laquelle il y a autant de cellules qu'il manque de parties aux deux ensemble; ensuite soient prises dans cette base autant de cellules continues à commencer par la première, qu'il manque de parties au premier joueur, et qu'on prenne la somme de leurs nombres. Donc il reste autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre. Qu'on prenne encore la somme de leurs nombres. Ces sommes sont l'une à l'autre comme les avantages des joueurs réciproquement; de sorte que si la somme qu'ils jouent est égale à la somme des nombres de toutes les cellules de la base, il en appartiendra à chacun ce qui est contenu en autant de cellules qu'il manque de parties à l'autre; et s'ils jouent une autre somme, il leur en appartiendra à proportion.

Par exemple, qu'il y ait deux joueurs, au premier desquels il manque deux parties, et à l'autre 4 : il faut trouver le parti.

Soient ajoutés ces deux nombres 2 et 4, et soit leur somme 6; soit prise la sixième base du Triangle arithmétique $P\delta$ dans laquelle il y a par conséquent six cellules $P, M, F, \omega, S, \delta$. Soient prises autant de cellules, à commencer par la première P , qu'il manque de parties au premier joueur, c'est-à-dire les deux premières P, M ; donc il en reste autant que de parties à l'autre, c'est-à-dire 4, F, ω, S, δ .

Je dis que l'avantage du premier est à l'avantage du second, comme $F + \omega + D + \delta$ à $P + M$, c'est-à-dire que, si la somme qui se joue est égale à $P + M + F + \omega + S + \delta$, il en appartient à celui à qui il manque deux parties la somme des quatre cellules $\delta + S + \omega + F$ et à celui à qui il manque 4 parties, la somme des deux cellules $P + M$. Et s'ils jouent une autre somme, il leur en appartient à proportion.

Annexe IV

Démonstration de la formule par récurrence.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, je la démontrerai néanmoins en peu de mots par le moyen de deux lemmes.

Le 1^{er}, que la seconde base contient les partis des joueurs auxquels il manque deux parties en tout.

Le 2^e, que si une base quelconque contient les partis de ceux auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules, la base suivante sera de même, c'est-à-dire qu'elle contiendra aussi les partis des joueurs auxquels il manque autant de parties qu'elle a de cellules.

D'où je conclus, en un mot, que toutes les bases du Triangle arithmétique ont cette propriété : car la seconde l'a par le premier lemme ; donc par le second lemme, la troisième l'a aussi, et par conséquent la quatrième ; et à l'infini. C. q. f. d.

Il faut donc seulement démontrer ces 2 lemmes.

Le 1^{er} est évident de lui-même ; car s'il manque une partie à l'un et une à l'autre, il est évident que leurs conditions sont comme φ à σ , c'est-à-dire comme 1 à 1, et qu'il appartient à chacun cette fraction :

$$\frac{\sigma}{\varphi + \sigma} \text{ qui est } \frac{1}{2}.$$

Le 2^e se démontrera de cette sorte.

Si une base quelconque, comme la quatrième $D\lambda$, contient les partis de ceux à qui il manque quatre parties, c'est-à-dire que, s'il manque une partie au premier, et trois au second, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue, soit celle qui est exprimée par cette fraction $\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda}$ qui a pour dénominateur la somme des cellules de cette base, et comme numérateur ses trois premières ; et que s'il manque deux parties à l'un, et deux à l'autre, la fraction qui appartient au premier soit $\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda}$; et que, s'il manque trois parties au premier, et une à l'autre, la fraction du premier soit $\frac{D}{D + B + \theta + \lambda}$, etc.

Annexe IV

Fin de la démonstration. Au dernier pas usage de $C_N^j + C_N^{j+1} = C_{N+1}^{j+1}$.

Je dis que la cinquième base contient aussi les partis de ceux auxquels il manque cinq parties ; et que s'il manque par exemple, deux parties au premier, et trois à l'autre, la portion qui appartient au premier sur la somme qui se joue est exprimée par cette fraction :

$$\frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu}.$$

Car pour savoir ce qui appartient à deux joueurs à chacun desquels il manque quelques parties, il faut prendre la fraction qui appartiendrait au premier en cas de gain, et celle qui lui appartiendrait en cas de perte, les mettre à même dénomination, si elles n'y sont pas, et en former une fraction, dont le numérateur soit la somme des deux autres, et le dénominateur double de l'autre, par le lemme précédent.

Examinons donc les fractions qui appartiendraient à notre premier joueur en cas de gain et de perte.

Si le premier, à qui il manque deux parties, gagne celle qu'ils vont jouer, il ne lui manquera plus qu'une partie, et à l'autre toujours trois ; donc il leur manque quatre parties en tout : donc, par l'hypothèse, leur parti se trouve en la base quatrième, et il appartiendra au premier cette fraction $\frac{D + B + \theta}{D + B + \theta + \lambda}$.

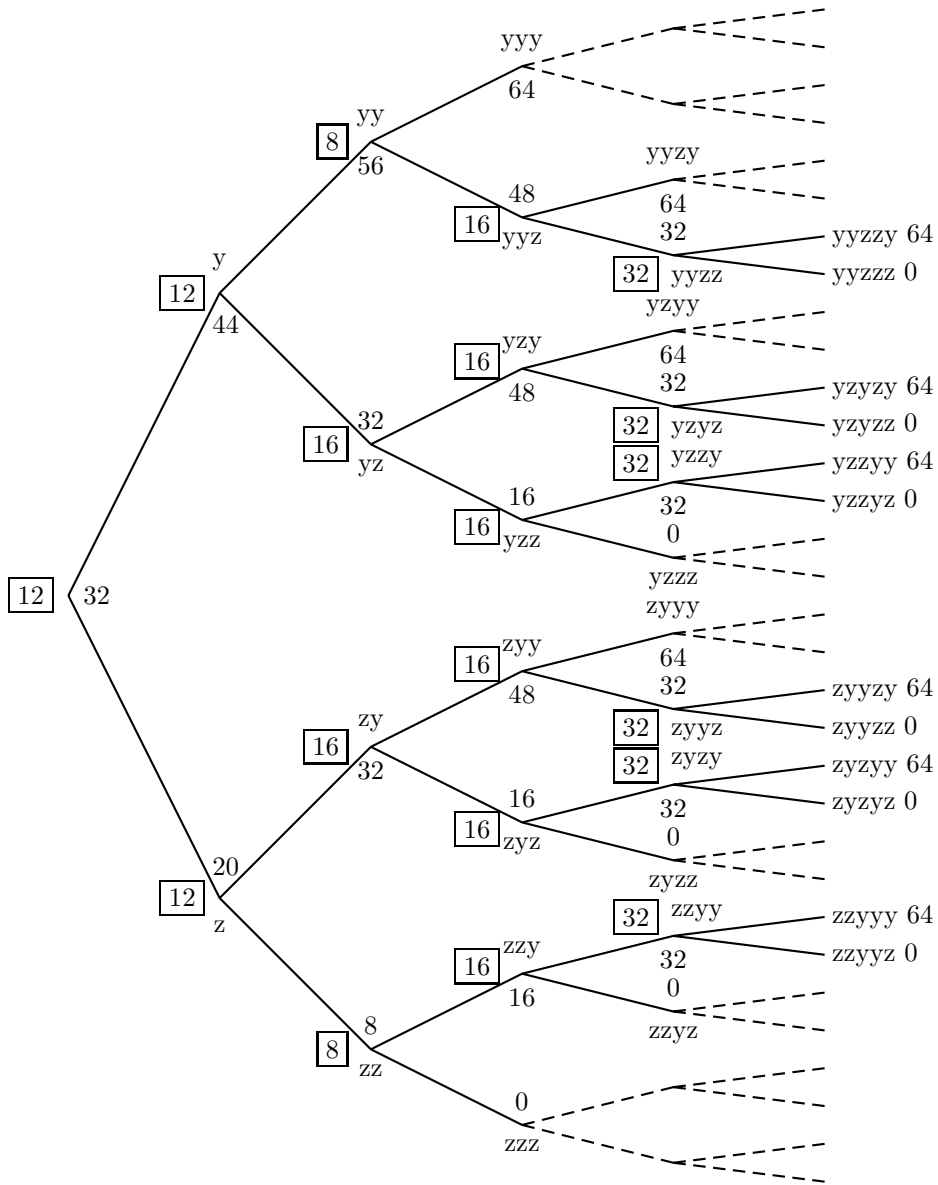
Si au contraire le premier perd, il lui manquera toujours deux parties, et deux seulement à l'autre, donc, par l'hypothèse, la fraction du premier sera $\frac{D + B}{D + B + \theta + \lambda}$. Donc, en cas de parti, il appartiendra au premier cette fraction :

$$\frac{D + B + \theta + D + B}{2D + 2B + 2\theta + 2\lambda}, \text{ c'est-à-dire, } \frac{H + E + C}{H + E + C + R + \mu}.$$

C. q. f. d.

Ainsi cela se démontre entre toutes les autres bases sans aucune différence, parce que le fondement de cette preuve est qu'une base est toujours double de sa précédente par la septième conséquence, et que, par la dixième conséquence, tant de cellules qu'on voudra d'une même base sont égales à autant de la base précédente (qui est toujours le numérateur de la fraction en cas de gain) plus encore aux mêmes cellules, excepté une (qui est le numérateur de la fraction en cas de perte) ; ce qui étant vrai généralement partout, la démonstration sera toujours sans obstacle et universelle.

Annexe V



Encadrées les valeurs des mises dans le problème « imaginaire ». Non encadrées la règle des partis ou martingale de Pascal, ou fortune du parieur au cours du jeu.

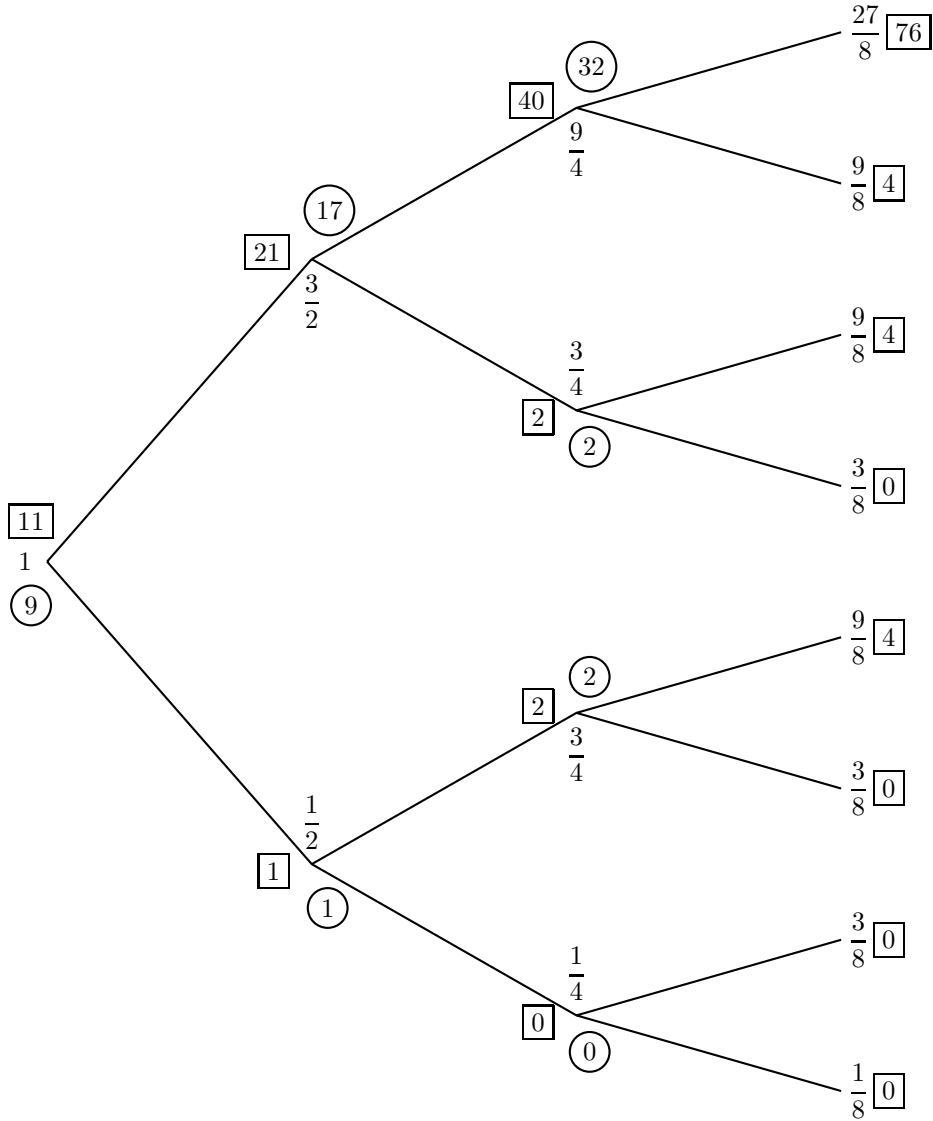
Annexe VI

Lundi

Mardi

Mercredi

Jeudi



Problème du prix de l'option.

Chiffres non encadrés : le cours de l'écu.

Chiffres encadrés : la fortune nécessaire au vendeur Jean (martingale de Pascal).

Chiffres entourés : l'emprunt à effectuer par le vendeur Jean en chaque éventualité.

Annexe VII

Version 68+1 du Pari de Pascal, inventée par Eric Rohmer pour « Ma nuit chez Maud ».

L'histoire se passe à Clermont-Ferrand. Celui qui dit « je » le premier est ingénieur. L'autre (Vidal) est professeur de philosophie à la fac. Ils ont été amis il y a une douzaine d'années lorsqu'ils étaient étudiants. Ils se rencontrent par hasard dans un café.

- Ah, tiens! dis-je, Pascal!
- Ca t'étonne?
- C'est curieux. Je suis justement en train de le relire, en ce moment.
- Et alors?
- Je suis très déçu.
- Dis, continue, ça m'intéresse.
- Ben, je ne sais pas. D'abord, j'ai l'impression de le connaître presque par cœur.

Et puis ça ne m'apporte rien : je trouve ça assez vide. Dans la mesure où je suis catholique, ou tout au moins j'essaie de l'être, ça ne va pas du tout dans le sens de mon catholicisme actuel. C'est justement parce que je suis chrétien que je m'insurge contre ce rigorisme. Ou alors, si le christianisme c'est ça, moi je suis athée!... Tu es toujours marxiste?

- Oui, précisément : pour un communiste, ce texte du pari est extrêmement actuel. Au fond, moi, je doute profondément que l'histoire ait un sens. Pourtant, je parie pour le sens de l'histoire, et je me trouve dans la situation pascalienne. Hypothèse A : la vie sociale et toute action politique sont totalement dépourvues de sens. Hypothèse B : l'histoire a un sens. Je ne suis absolument pas sûr que l'hypothèse B ait plus de chances d'être vraie que l'hypothèse A. Je vais même dire qu'elle en a moins. Admettons que l'hypothèse B n'a que dix pour cent de chances et l'hypothèse A quatre-vingt-dix pour cent. Néanmoins, je ne peux pas ne pas parier pour l'hypothèse B, parce qu'elle est la seule qui me permette de vivre. Admettons que j'aie parié pour l'hypothèse A et que l'hypothèse B se vérifie, malgré ses dix pour cent de chances, seulement : alors j'ai absolument perdu ma vie... Donc je *dois* choisir l'hypothèse B, parce qu'elle est la seule qui justifie ma vie et mon action. Naturellement, il y a quatre-vingt-dix chances pour cent que je me trompe, mais ça n'a aucune importance.

- C'est ce qu'on appelle l'espérance mathématique, c'est-à-dire le produit du gain par la probabilité. Dans le cas de ton hypothèse B, la probabilité est faible, mais le gain est infini, puisque c'est pour toi le sens de ta vie, et pour Pascal le salut éternel.

Deux jours plus tard

Dès qu'elles sont sorties, Vidal se lève et va vers la bibliothèque.

- Il doit bien y avoir un Pascal, ici. On a beau être franc-maçon...

Il s'accroupit et découvre sur le rayon inférieur, une édition scolaire des *Pensées*. Il la feuillette. Je me suis levé et m'approche de lui.

- Pourrais-tu me dire, me demande-t-il, s'il y a une référence précise aux mathématiques dans le texte sur le pari. (Il lit) : « Partout où est l'infini et où il n'y a pas infini de hasard de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer : il faut tout donner... et ainsi, quand on est forcé à jouer, il faut renoncer à la raison pour garder la vie », etc.

Il me tend le livre. J'y jette un coup d'oeil.

- C'est exactement ça, « l'espérance mathématique », dis-je. Dans le cas de Pascal, elle est toujours infinie... À moins que la probabilité de salut ne soit nulle. Puisque l'infini multiplié par zéro égale zéro. Donc l'argument ne vaut rien pour quelqu'un qui est absolument incroyant.

Note. Sur le thème de cet article l'auteur a donné une conférence le 20 mars 2003 dans le cadre du Séminaire ouvert au public organisé par l'IREM et la librairie Dialogues de Brest. Il tient à remercier pour leurs remarques et indications : Sandrine Bourgeois, Rainer Buckdahn, Pierre Crépel, Jérôme Depauw, Michael Keane, Shige Peng et Catherine Rainer.

Références

- [1] Pascal, *Œuvres Complètes*, Éd. du Seuil, 1963.
- [2] Fermat, *Précis des œuvres mathématiques*, Toulouse 1853, (Gabay, 1989).
sur le calcul des probabilités
- [3] Jacquard A. *Les Probabilités*, Que Sais-Je, n° 1571, (1974).
- [4] Renyi A. *Calcul des Probabilités*, Dunod (traduction), 1965.
- [5] Todhunter I. *A history of the mathematical theory of probability*, Cambridge, 1865.
sur les martingales et le mouvement brownien
- [6] Doob J.L. *Stochastic processes*, Wiley, 1953.
- [7] Lévy Paul. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars, 1937.
- [8] Lévy Paul. *Processus stochastiques et mouvement brownien*, Gauthier-Villars, 1948.
- [9] Rogers L.C.G., Williams D. *Diffusions, Markov processes and martingales* (2 vol.), Wiley, 1994.
- [10] Encyclopædia universalis, article « Martingale » (1978).
sur les probabilités et les mathématiques financières
- [11] Almgren R. *Financial derivatives and partial differential equations*, American Math. Monthly, Vol. **109**, n° 1, (2002), p.1–12.
- [12] Black F., Scholes M. *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of political economy, Vol. **81**, (1973), p. 637–654.
- [13] Cox J.C., Rubinstein M. *Options Markets*, Prentice Hall, 1985.
- [14] Mandelbrot B. *Fractales, hasard et finance*, Champs, Flammarion, 1997.
- [15] Pagès G., Bouzitat C. *En passant par hasard*, Vuibert, 2000.
autres références
- [16] Bell E.T. *Men of mathematics*, Simon and Schuster, 1937.
- [17] Bricmont J., Sokal A. *Impostures intellectuelles*, Odile Jacob, 1997.
- [18] Horville R. *Itinéraires littéraires XVII^e siècle*, Hatier, 1988.
- [19] Lagarde et Michard. *Collection littéraire XVII^e siècle*, Bordas, 1963.
- [20] Rohmer Eric, *Six contes moraux*, Petite bibliothèque des cahiers du cinéma (Ma nuit chez Maud, 1969).