

Courbes de Bézier

Exercice 1. Montrer que le polynôme de Bernstein B_i^n atteint son maximum en $\frac{i}{n}$. Pourquoi dit-on que le déplacement du i -ème point de contrôle n'affecte la courbe essentiellement qu'au voisinage de $t = \frac{i}{n}$?

Exercice 2. Étudier la courbe de Bézier de contrôle $P_0(0, 0)$, $P_1(-5, 10)$, $P_2(5, 10)$, $P_3(0, 0)$. Comment déterminer la courbe image par une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $\frac{1}{2}$?

Exercice 3. Montrer que si γ est une courbe de Bézier cubique ayant un point de rebroussement en t_0 alors $\gamma'(\mathbb{R})$ est une parabole passant par $(0, 0)$ en t_0 .

En déduire un polygone de contrôle produisant une courbe de Bézier cubique avec un point de rebroussement.

Existe-t-il des courbes de Bézier cubiques non planes ayant un point de rebroussement ?

Exercice 4. On considère $a \in \mathbb{R}$ et g une courbe de Bézier de polygone de contrôle $Q_0(-1, -1)$, $Q_1(2, a)$, $Q_2(-2, a)$, $P_3(1, -1)$.

(1) Donner explicitement les équations paramétriques de la courbe g .

(2) Étudier g pour $a = \frac{4}{3}$.

On souhaite construire une courbe de Bézier γ de degré 4 ayant deux points de rebroussements.

(3) Soit g la courbe de Bézier dérivée de γ . Si γ a deux rebroussements que dire de g ?

(4) Construire un polygone de contrôle pour γ .

(5) Sans calculer la paramétrisation de γ , positionner ces points de rebroussements et esquisser la courbe.

(6) Peut-on construire une courbe de degré 4 ayant trois rebroussements ?

Exercice 5. Soit γ une courbe de Bézier de polygone de contrôle (P_0, P_1, \dots, P_n) . Pour $t \in]0, 1[$ donnez une construction d'un polygone de contrôle pour la courbe γ restreinte à $[0, t]$.

Exercice 6. Soit γ une courbe de Bézier de degré n de l'espace de polygone de contrôle (P_0, P_1, \dots, P_n) .

Montrez que le courbure et la torsion de γ en 0 sont

$$\kappa(0) = 2 \frac{n-1}{n} \frac{\text{Aire}(P_0, P_1, P_2)}{\|\vec{P_0P_1}\|^3} \text{ et } \tau(0) = \frac{3n-2}{2} \frac{\text{Volume}(P_0, P_1, P_2, P_3)}{\text{Aire}(P_0, P_1, P_2)^2}$$

Donner la courbure et la torsion en $t = 1$. Comment obtenir la courbure et la torsion en $t \in]0, 1[$