

Transformation de Laplace

Exercice 0.1. Pour $\epsilon > 0$, on note f_ϵ la fonction d'une variable réelle valant $1/\epsilon$ sur $[0, \epsilon]$ et 0 ailleurs.

Calculez la transformée de Laplace de f_ϵ et montrez que celle-ci tend vers 1 lorsque ϵ tend vers 0.

Exercice 0.2. Calculez la transformée de Laplace de la fonction partie entière.

Exercice 0.3. Déterminez la transformée de Laplace de la fonction $t \mapsto |\sin t|$ définie sur \mathbb{R} .

Exercice 0.4. Déterminez la transformée de Laplace de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ définie sur $\mathbb{R}_{>0}$ puis celle de $t \mapsto \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$. Déduisez-en $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau$.

Exercice 0.5. Soient $0 < a < b$.

Donnez la transformée de Laplace de $t \mapsto \frac{\cos(at) - \cos(bt)}{t}$.

Donnez la transformée de Laplace de $t \mapsto \frac{\exp(at) - \exp(bt)}{t}$. Déduisez-en $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(at) - \exp(bt)}{t} dt$.

Exercice 0.6. Résoudre $y'' + 2y' + 2y = 2\delta$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 0.7. Résoudre le système $\begin{cases} x'' + 2y = e^{-t} \\ y'' - 2x = 0 \end{cases}$ avec $\begin{cases} x(0) = 1 & y(0) = 1 \\ x'(0) = 0 & y'(0) = -1 \end{cases}$.

Exercice 0.8. Soit J_0 la solution de l'équation de Bessel :

$$ty'' + y' + ty = 0$$

telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

(1) (a) Calculez la transformée de Laplace de J_0 .

(b) Déduisez-en $J_0 * J_0$.

(2) (a) À partir de l'équation différentielle, calculez J_0 sous forme de série entière.

(b) Déduisez-en la transformée de Laplace de $t \mapsto J_0(\sqrt{t})$.

(c) Donnez les solutions finies en $t = 0$ de l'équation d'oscillation d'un fil pesant de Bernouilli

$$xy'' + y' + \alpha^2 y = 0 \text{ avec } \alpha > 0.$$