$\mathbb{C}$

Exercice 0.1. *Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :*
$a = (2+3i)(4-5i)2i\, b = (2-3i)^4$, $c = \dfrac{7+5i}{(4-3i)^2}$, $d = \dfrac{2-3i}{i-5}$, $u_n = (1+i)^n$, $v_n = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 0.2. *Déterminer les module, argument, partie réelle et imaginaire de* $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$.
En déduire les solutions réelles de l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = \sqrt{6}$.

Exercice 0.3. *Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*
$$(2+i)z + 3 - 2i = 0, \qquad (2+i)z + (3-2i)\overline{z} = 4, \qquad (1+i)z + (1-i)\overline{z} = 4i.$$

Exercice 0.4. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto z^2 + 4\overline{x}$. Déterminer les ensembles suivants :*
$$f(\mathbb{R}), \quad \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}.$$

Exercice 0.5. *Soit f une fonction qui, à un nombre complexe z, associe $f(z) = \frac{z+\overline{z}-i}{z-i\overline{z}}$.*
(1) *Déterminer le domaine de définition de f. Il sera noté $Dom(f)$.*
(2) *Déterminer $\{z \in Dom(f) \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$.*

Exercice 0.6. *Résoudre l'équation en $z \in \mathbb{C}$: $z^n = a$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.*

Exercice 0.7. *Résoudre l'équation : $(z+2i)^{10} = (z-2i)^{10}$. Montrer que les solutions sont toutes réelles et exprimer-les a l'aide de la fonction* tan.

Exercice 0.8. *Factoriser $X^6 - 1$ et $X^6 + 1$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 0.9. *Résoudre $\sum_{k=0}^{n} z^k = 0$.*

Exercice 0.10. *Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:*
$$(2+i)z^2 + 3 - 2i = 0, \qquad iz^2 + 2z + i = 0, \qquad 2z^2 + 4iz - 2 - i = 0,$$
$$(1-i)z^2 - (6-4i)z + 9 - 7i = 0, \qquad z^2 + (1-i)z + (2+i) = 0.$$

Exercice 0.11. *On considère le polynôme $P(X) = 5X^4 - 24X^3 + 42X^2 - 24X + 5$.*
(1) *Montrez que si z est une racine complexe de P alors $\overline{z}$ et $\frac{1}{z}$ le sont aussi.*
(2) *Calculer $P(2+i)$. En déduire une factorisation de P sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 0.12. *Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations $z^2 - (4+i)z + 5 - i = 0$ et $z^2 - (4-i)z + 5 + i = 0$. En déduire une factorisation sur $\mathbb{R}$ du polynôme $(X^2 - 4X + 5)^2 + (X+1)^2$.*

Exercice 0.13. *Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ converge. On note e^z sa limite.*
Vérifier que $e^{z+w} = e^z + e^w$ et en déduire la formule de Moivre.
Donner une autre démonstration de la formule de Moivre.

Exercice 0.14. *Donner des exemples d'exercices de linéarisation des puissances du cosinus ou du sinus et des applications au calcul d'intégrales et de primitives.*

Exercice 0.15. *Dessiner les courbes de niveaux des fonctions*
$$z \mapsto |z|, \qquad z \mapsto arg(z), \qquad z \mapsto \Re e z, \qquad z \mapsto \Im m z,$$
puis pour $(a,b) \in \mathbb{C}$ de
$$z \mapsto |\frac{z-a}{z-b}|, \quad z \mapsto arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right), \quad z \mapsto \Re e\left(\frac{z-a}{z-b}\right), \quad z \mapsto \Im m\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

Exercice 0.16. *Que fait subir au plan complexe l'application*
$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{2}\left(z + \overline{z} - i\frac{(z-\overline{z})^2}{|z-\overline{z}|}\right) \end{array}$$