$\mathbb{R}$

Questions de cours

Révisez la construction de $\mathbb{Q}$ et l'écriture décimale d'un nombre rationnel.
Révisez les suites et la convergence.
Montrez qu'il n'existe pas de nombre rationnel de carré égal à deux.

En utilisant vos livres préférés,
complétez au moins l'une des constructions suivantes de $\mathbb{R}$.

1. $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind

Une coupure de $\mathbb{Q}$ est une partie A de $\mathbb{Q}$ telle que

- A est non vide et différente de $\mathbb{Q}$
- si $a \in A$ et $a' < a$ alors $a' \in A$
- A n'a pas de plus grand éléments.

(1) Vérifier que si $q \in \mathbb{Q}$, $A_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < q\}$ est une coupure.
(2) Donner un exemple de coupure dont le complémentaire n'a pas de plus petit élément.

On définit $\mathbb{R}$ comme l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$.

(3) Construire l'addition sur $\mathbb{R}$. Construire la multiplication sur $\mathbb{R}$ (plus dur).
(4) Montrer que l'inclusion est une relation d'ordre sur les coupures et qu'il existe un morphisme de corps ordonné de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
(5) Montrer que les suites croissantes majorés de nombres réels convergent.
(6) En déduire le théorème suivant

Théorème 1.1. *Toute partie non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieur.*

Puis que deux suites adjacentes convergent.

(7) En déduire le théorème suivant

Théorème 1.2. *Toute suite de Cauchy de $\mathbb{R}$ converge.*

2. $\mathbb{R}$ par les suites de Cauchy

(1) Montrer qu'un suite de rationnels convergente est de Cauchy.
(2) Donner un exemple de suite de Cauchy de rationnels qui ne converge pas.

On considère $\mathcal{R}$ l'ensemble des suites de Cauchy de rationnels,

(3) Montrer que la relation $(u_n)T(v_n) \Leftrightarrow \lim(u_n - v_n) = 0$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{R}$ dont on notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des classes d'équivalence.
(4) Définir l'addition, la multiplication, la relation d'ordre de $\mathbb{R}$ et un morphisme de corps ordonné de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
(5) Montrer le théorème 1.2.
(6) En déduire le théorème 1.1.

3. $\mathbb{R}$ par l'écriture décimale

On choisit dix symboles au hasard pour nommer les dix premiers nombres entiers : 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 et on nomme le onzième 10. On les utilise pour nommer les nombres rationnels : si $q \in \mathbb{Q}$ vérifie $q = \sum_{i \leq n} a_i 10^i$ on nommera q par la suite $a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$

On définit un nombre réel comme étant un nom $a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots$ quelconque modulo l'égalité $a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots a_p 999 \dots = a_n a_{n-1} \dots a_0, a_{-1} a_{-2} \dots (a_p + 1)$ lorsque $a_p \neq 9$.

(1) Définir l'addition et la multiplication.
(2) Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
(3) Montrer le théorème 1.1.

4. Quelques généralités

Exercice 4.1. *Montrez que* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Exercice 4.2. *Définir l'écriture dyadique d'un nombre réel et en déduire une surjection de* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *sur* $[0,1]$ *puis sur* $\mathbb{R}$*.*

5. Quelques nombres réels

5.1. Irrationnels.

Exercice 5.1. *Montrer qu'un nombre est rationnel si et seulement si son écriture décimale est périodique. En déduire que le nombre de Liouville* $L = \sum_{n>0} \frac{1}{10^{n!}}$ *n'est pas rationnel.*

Exercice 5.2. *Considérons les suites de nombres rationnels* $x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ *et* $y_n = x_n + \frac{1}{n!}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$*.*

- *Montrer que les suites sont adjacentes.*

On notera e leur limite dans $\mathbb{R}$*.*

- *Montrer si* $e = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *alors* $q!x_q < p(q-1)! < q!x_q + 1$ *et conclure.*
- *Donner une valeur approchée à* 10^{-3} *de e.*
- *Donner les deux premières décimales de e.*

5.2. Transcendants.

Exercice 5.3. *Un nombre réel x est algébrique si il existe un polynôme non nul* $P \in \mathbb{Q}[X]$ *tel que* $P(x) = 0$*. Dans le cas contraire il est dit transcendant.*

(1) *Montrer que l'on peut supposer* $P \in \mathbb{Z}[X]$*.*
(2) *Montrer que si* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *est de degré n et* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *n'est pas une racine de P alors* $|P(\frac{p}{q})| > \frac{1}{q^n}$*.*
(3) *En déduire que si* $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ *est une racine de P alors il existe* $c \in \mathbb{R}$ *tel que pour tout* $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ *on ait*
$$|x - \frac{p}{q}| > \frac{c}{q^n}.$$
(4) *En déduire que L est transcendant.*

Exercice 5.4. *Lire dans Siegel –* Transcendental numbers*, ou dans Escofier –* Théorie de Galois : cours avec exercices corrigés*, une preuve de la transcendance de e (Hermite 1873).*

6. π

Exercice 6.1. *Nous voulons étudier la longueur du demi-périmètre d'un cercle de rayon unité que nous noterons* π *suivant une tradition plusieurs fois millénaire. Pour cela nous suivrons Archimède.*

(1) *Quand et où vécu Archimède ?*
(2) *Calculer le périmètre d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle.*
(3) *En extraire une suite par* $n = 2^k 6$ *composée de nombres algébriques convergeant vers* π*.*
En particulier, le demi-périmètre peut se mesurer avec un nombre réel.
(4) *En calculant suffisamment d'éléments de la suite, montrer l'encadrement d'Archimède*
$$3 + \frac{1}{7} \leq \pi \leq 3 + \frac{11}{70}.$$
(5) *Montrer que l'aire du disque de rayon unité peut se mesurer avec un nombre réel et vaut* π*.*

Pour les deux théorèmes suivant on pourra consulter le très élégant, mais assez difficile, livre de Siegel – *Transcendental numbers.*

Théorème 6.1 (Lambert (1770))**.** π *est irrationnel.*

Théorème 6.2 (Lindemann (1882))**.** π *est transcendant.*

Exercice 6.2. *En comparant les longueurs d'arc du cercle unité aux longueurs de cordes, montrer que* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$*. Retrouver cette limite en comparant les aires de secteurs du disque avec des triangles bien choisis.*