Relations dans un triangle

Dans une triangle ABC, on note a, b et c les longueurs respectives de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, $\widehat{A}$ l'angle géométrique en A, p la moitié du périmètre du triangle ($2p = a + b + c$), S l'aire du triangle, R le rayon du cercle circonscrit et r celui du cercle inscrit. On notera de plus I_A et r_A le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle $\widehat{A}$ et M, N, P les points de contact de ce cercle avec (BC), (AC) et (AB). Enfin J, K et L seront les points de contact du cercle inscrit avec (BC), (AC) et (AB).

1. Dans un triangle quelconque

Exercice 1.1. *L'isogonale d'une droite passant par A est la symétrique par la bissctrice intérieur en A. Montrez que si trois droites passant pas A, B et C respectivement sont concourantes alors leurs isogonales sont aussi concourantes.*

Exercice 1.2. *Soient ABC un triangle d'orthocentre H et T, Q, R les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Montrer que $HA.HT = HB.HQ = HC.HR$.*

Exercice 1.3. *Montrez que les points suivants ont les coordonnées barycentriques suivantes dans le repère affine A, B, C :*
- *l'intersection des médianes G : $(1, 1, 1)$,*
- *le centre du cercle inscrit I : (a, b, c),*
- *l'orthocentre H : $(a \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}, b \cos \widehat{C} \cos \widehat{A}, c \cos \widehat{A} \cos \widehat{B})$,*
- *le centre du cercle circonscrit O : $(\sin 2\widehat{A}, \sin 2\widehat{B}, \sin 2\widehat{C})$*

Exercice 1.4. *Montrez que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ et $bc \sin \widehat{A} = 2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.*

Exercice 1.5. *Montrez que $\cos \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ et $\sin \frac{\widehat{A}}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.*

Exercice 1.6. *Montrez que $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$. Déduisez-en que $R = \frac{abc}{a\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$.*

Exercice 1.7. *Montrez que $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$. Déduisez-en que $S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.*

Exercice 1.8. *Montrez que $p = AP = AN$. Déduisez-en que si un cercle $\mathscr{C}$ est inscrit dans un angle $\widehat{A}$ alors toute droite d tangente à $\mathscr{C}$ et séparant A de $\mathscr{C}$ définie avec les cotés de l'angle un triangle dont le périmètre est indépendant de d.*

Exercice 1.9. *Montrez que $p - b = BJ = CN = CM$, $pcb = CJ = BP = BM$ et $LP = KN = BC$.*

Exercice 1.10. *Montrez que $r = \frac{S}{p}$, $r_A = \frac{S}{p-a}$, $r_B = \frac{S}{p-b}$ et $r_C = \frac{S}{p-c}$. Déduisez-en que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C}$ et que $4R = r_A + r_B + r_C - r$.*

2. Dans des triangles particuliers

Exercice 2.1. *Dans un triangle ABC rectangle en A de hauteur $[AH]$, on note $h = AH$, $b' = CH$ et $c' = CH$. Montrez que $ah = bc$, $ac' = c^2$, $b'c' = h^2$ et $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.*

Exercice 2.2. *Dans un triangle équilatéral, montrez que la somme des distances d'un point intérieur aux côtés est indépendante de ce point.*

Exercice 2.3. *Montrez que la moyenne géométrique de trois nombres positifs est plus petite que leur moyenne arithmétique et déduisez-en que $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$. Montrez ensuite que l'on a égalité si et seulement si le triangle est équilatéral.*