Transformations

1. Applications affines

Exercice 1.1. *Montrez qu'une transformation affine $f : A \to A$ d'un espace de dimension n fixant $n+1$ points n'appartenant pas à un sous-espace propre est l'identité.*

Exercice 1.2. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère affine canonique, déterminez la projection sur le plan d'équation $2x+4y+2z-4=0$ parallèlement au vecteur* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 1.3. *Montrez que le conjugué d'une projection par une application affine est une projection.*

Exercice 1.4. *Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère affine canonique, déterminez la symétrie par rapport au plan d'équation $2x+4y+2z-4=0$ parallèlement au vecteur* $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 1.5. *Soit s une symétrie, montrez que $\frac{1}{2}(s+id)$ est une projection.*

Exercice 1.6. *Montrez que le conjugué d'une symétrie par une application affine est une symétrie.*

Exercice 1.7. *Dans le plan on se donne cinq points distincts trois à trois non alignés . Déterminez les pentagones dont ces points sont les milieux des côtés.*

Exercice 1.8. *Montrez qu'une configuration possédant deux centres de symétrie distincts en possède une infinité.*

Exercice 1.9. *Une affinités de rapport k est une application $f : A \to A$ telle qu'il existe une projection p telle que pour tout M $p(\overrightarrow{M)f}(M) = kp(\overrightarrow{M)M}$ n. Montrez que $f = kid + (1-k)p$.*

Exercice 1.10. *Quel type d'applications obtient-on en composant des homothéties ?*

Exercice 1.11. *Soient A, B, A' et B' quatre points non alignés tels que $\vec{AB}$ et $\vec{A'B'}$ soient colinéaires. Discutez le nombre d'homothéties envoyant $[AB]$ sur $[A'B']$*

Exercice 1.12. *Montrez que les homothéties préservent les angles.*

Exercice 1.13. *Reprendre les preuves des théorèmes de Pappus, de Thalès et de Ménélaüs en utilisant des homothéties.*

Exercice 1.14. *Soient s_A, s_B et s_C trois symétries centrales de centres A, B et C. Montrez que $s_A \circ s_B \circ s_C = s_C \circ s_B \circ s_A$ et que cet application est une symétrie centrale dont vous préciserez le centre.*

Exercice 1.15. *Déterminez les applications affines préservant une parallélogramme non plat et étudiez la structure de ce groupe.*

Exercice 1.16. *Étudiez l'application de* $\mathbb{R}^3$ *donnée dans les coordonnées affines canoniques par*

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (3x+2y+z-1)/2 \\ (x+4y+z-1)/2 \\ (-x-2y+z+1)/2 \end{bmatrix}.$$

2. Isométries

Exercice 2.1. *Montrez que toute isométrie d'un espace affine de dimesion* n *est la composé de moins de* $n+1$ *réflexions.*

Exercice 2.2. *Montrez qu'une isométrie du plan est une réflexion si et seulement si l'ensemble de ses points fixes est une droite.*

Exercice 2.3. *Montrez que tout déplacement du plan est une composée de deux réflexions.*

Exercice 2.4. *Montrez que tout déplacement du plan est une rotation ou une translation et que tout antidéplacement est une réflexion ou une symétrie glissée.*

Exercice 2.5. *Montrez que si deux triangles sont congruents, il existe une isométrie envoyant le premier sur le deuxième.*

Exercice 2.6. *Soient* A *et* B *deux points dans le même demi-plan délimité par une droite* d*. Quels points* M *de la droite minimisent* $AM + MB$ *?*

Exercice 2.7. *Dans une rectangle* $ABCD$ *on choisit un point sur chaque côtés :* P*,* Q*,* R *et* S *de sorte que le quadrilatère* $PQRS$ *soit convexe. Déterminer les formes de* $PQRS$ *qui minimisent son périmètre puis parmi ceux-ci ceux qui minimisent l'aire de* $PQRS$*.*

Exercice 2.8. *Montrez que si la composée de trois rotations d'angles* θ*,* θ' *et* θ'' *est l'identité alors les trois centres, s'ils ne sont pas alignés, forment un triangle d'angles* $\theta/2$*,* $\theta'/2$ *et* $\theta''/2$

Exercice 2.9. *Soient* A *et* B *deux points d'un cercle* $\mathscr{C}$*. Pour* $M \in \mathscr{C} - \{A, B\}$ *on note* H_M *l'orthocentre du triangle* ABM*.*

- *Montrez que le vecteur* $M\vec{H}_M$ *est indépendant de* M*.*
- *Décrivez* $\{H_M \in \Pi \mid M \in \mathscr{C} - \{A, B\}\}$*.*
- *Quel lieu décrivent les points d'intersections des cercles de centres* M *et* H *et de rayon* MH *lorsque* M *décrit* $\mathscr{C} - \{A, B\}$*.*

Exercice 2.10. *Soient* $\mathscr{C}_1$ *et* $\mathscr{C}_2$ *deux cercles de même rayon se coupant en* A *et* B*. Soient* M *un point de* $\mathscr{C}_1$ *et* M' *son image par la rotation de centre* A *transformant* $\mathscr{C}_1$ *en* $\mathscr{C}_2$*. Montrez que* M*,* B *et* M' *sont alignés.*

Exercice 2.11. *Donnez le sous-groupe du groupe des permutations de* $\{A, B, C, D\}$ *réalisées par les isométries préservant un carré de sommets* A*,* B*,* C *et* D*.*