De la géométrie à l'algèbre linéaire

Pour le 27/28 novembre : **1.1.,1.2.,1.3.,1.4.,1.5.,2.1., 2.2.**

1. Espaces vectoriels

On dit que deux couples de points (A, B) et (C, D) d'un plan Π définissent le même vecteur du plan s'ils ont même direction (celle de (AB)), même sens (celui de $[AB)$) et même longueur (celle de $[AB]$). L'ensemble des vecteurs du plan Π sera noté $\vec{\Pi}$. (Qu'est ce qu'un vecteur du plan ?)

Exercice 1.1. *Soient O un point du plan et $\vec{AB}$ un vecteur. Montrez qu'il existe un unique point C tel que $\vec{OC} = \vec{AB}$*

Exercice 1.2. *Montrez que l'ensemble des vecteurs d'un plan forment un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension deux.*

Exercice 1.3. *Définissez le produit scalaire de deux vecteurs et vérifiez que deux droites sont perpendiculaires si leurs directions sont orthogonales. Vérifiez ensuite que $||\vec{AB}|| = AB$.*

Exercice 1.4. *Soient O un point du plan et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Donnez la définition de l'ensemble $O + \mathbb{R}\vec{v}$. Montrez que ces ensembles de points sont exactement les droites du plan.*

2. Espaces affines

Exercice 2.1. *Donnez la définition d'un espace affine euclidien et vérifiez que le plan Π en est un.*

Exercice 2.2. *Donnez les définitions et des exemples des objets suivants :*
- *un sous-espace affine ;*
- *une application affine ;*
- *une projection ;*
- *une symétrie ;*
- *une symétrie centrale.*

Exercice 2.3. *Soit E un espace affine. Donnez la définition d'un barycentre d'un ensemble fini de points pondérés. Montrez que*
- *le barycentre de n points pondérés appartient aux sous-espaces affines contenant ces n points ;*
- *une application est affine si et seulement si elle préserve les barycentres.*

Définissez à l'aide des barycentres
- *un segment de E;*
- *une partie convexe de E;*
- *l'enveloppe convexe d'une partie de E.*

Exercice 2.4. *Une application affine préserve-t-elle les milieux ? les bissectrices ?*

Exercice 2.5. *Réécrivez le théorème de Thalès en termes de barycentre et d'application affine.*

Exercice 2.6. *Montrez que l'isobarycentre de trois points non alignés du plan est le point de concourance des médianes. Donnez ses coordonnées barycentriques dans le repère affine formé des trois points.*

Exercice 2.7. *Montrez que dans un quadrilatère le segment joignant les milieux des côtés opposés et le segment joignant les milieux des diagonales se coupent en leurs milieux.*

Exercice 2.8. *Soient d_1, d_2, d_3, d_4 quatres droites sécantes deux à deux mais dont aucun triplet n'est concourant. Une telle figure s'appelle un quadrilètère complet. Montrez qu'il y a six points d'intersection. Une diagonal est un segment joignant deux de ces points sans être contenu dans une de ces droites. Montrez que les milieux des trois diagonales sont alignés.*