Le triangle

Nous allons étudier certaines propriétés élémentaires des triangles. Pour des propriétés moins élémentaires, on pourra consulter

Y. & R. SORTAIS, *La géométrie du triangle.*

1. Trois cas de congruences

Exercice 1.1. *Rappelez l'axiome de congruence des triangles.*

Exercice 1.2. *Montrez que si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que $AC = A'C'$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ alors $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$.*

Exercice 1.3. *Montrez que si ABC et $A'B'C'$ sont deux triangles tels que $AC = A'C'$, $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ alors $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$.*

Exercice 1.4. *Soit ABC un triangle isocèle en A. On suppose que la médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en $D \notin [BC]$. Soit $E \in (AD) - [AD)$ tel que $AE = BD$. Comparez ABD et ACE et montrez que CDE est isocèle.*

Exercice 1.5. *Montrez qu'un triangle ayant deux hauteurs de même longueur est isocèle.*

2. Quelques droites et cercles remarquables d'un triangle

Exercice 2.1. *Définir une médiatrice d'un segment. Montrez son existence et son unicité. Montrez que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.*

Montrez qu'il existe un unique cercle circonscrit à un triangle.

Exercice 2.2. *Définir une bissectrice d'un angle. Montrez son existence et son unicité. Montrez que les bissectrices d'un triangle sont concourantes.*

Montrez qu'il existe un unique cercle inscrit dans un triangle.

Exercice 2.3. *Définir les médianes d'un triangle. Montrez qu'elles sont concourantes.*

Montrez que les médianes d'un triangle le partagent en six triangles d'aires égales.

Exercice 2.4. *Définir les hauteurs d'un triangle. Montrez qu'elles sont concourantes.*

Exercice 2.5. *Soit ABC un triangle. Le triangle formé par les pieds des hauteurs s'appelle triangle orthique de ABC. Montrez que les hauteurs de ABC sont les bissectrices de son triangle orthique.*

Exercice 2.6. *Soient ABC un triangle non équilatéral, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre et G le point d'intersection des médianes.*

Montrez que ces trois points sont alignés et vérifient $\vec{HG} = 2\vec{GO}$. Cette droite s'appelle la droite d'Euler du triangle.

Montrez que les pieds des hauteurs, les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets et les milieux des côtés sont cocycliques. Ce cercle est le cercle d'Euler du triangle.

Exercice 2.7. *Montrez que les symétriques de l'orthocentre par rapports aux cotés du triangle sont sur le cercle circonscrit.*

Exercice 2.8. *Soient ABC un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit. Montrez que $M \in \mathscr{C}$ si et seulement si les projetés de M sur les droites (AB), (BC) et (AC) sont alignés. Cette droite est la droite de Simson de M par rapport à ABC.*