# Géométrie plane axiomatique

Les objets élémentaires de la géométrie plane sont les points et les droites. Pour décrire une géométrie, ces objets doivent avoir des propriétés élémentaires qui nous semblent intuitivement évidentes (*cf.* les axiomes d'incidences). Ces axiomes doivent donc être :

- les plus élémentaires et les moins nombreux possibles,
- suffisamment riches pour pouvoir démontrer, à partir de ceux-ci et avec les règles de la logique, les propriétés que l'expérience (le dessin) nous founit .

Nous suivrons l'exposition de la géométrie euclidienne plane de

Gilbert ARSAC, *L'axiomatique de Hilbert et l'enseignement de la géométrie au Collège et au Lycée*,
Daniel PERRIN, *Mathématiques d'école.*

Des références historiques sont (il y en a beaucoup d'autres)

EUCLIDE, *Les Éléments*,

David HILBERT, *Les fondements de la géométrie.*

Les points et les droites d'un plan ne sont pas définis dans l'approche axiomatique seules leurs propriétés élémentaires sont explicitées par les axiomes. Ces derniers donnent donc *a posteriori* une définition implicite des points et des droites.

On notera $\Pi$ un ensemble appelé plan dont les éléments sont appelés points et $\Delta$ un ensemble de parties non vides de $\Pi$ appelées droites.

Lorsqu'un point $P$ appartient à une droite $d$ nous dirons aussi que $P$ est sur $d$, que $d$ passe par $P$ ou que $P$ et $d$ sont incidents. Des points appartenants à une même droite sont dits alignés.

## 1. Les axiomes d'incidence

Ils régissent les propriétés d'intersections.

**Axiome I.1** Par deux points distincts du plan passe une unique droite.

$$\Big( \forall (P,Q) \in \Pi^2 \text{ tels que } P \neq Q, \exists !\ d \in \Delta \text{ telle que } P \in d \text{ et } Q \in d \Big)$$

**Exercice 1.1.** *Écrire la négation de la formule logique ci-dessus.*

La droite passant pas $P$ et $Q$ sera notée $(PQ)$.

**Axiome I.2** Toute droite contient au moins deux points.

**Axiome I.3** Il existe trois points non alignés.

**Exercice 1.2.** *Écrire les formules logiques correspondant aux axiomes ci-dessus et leurs négations.*

**Exercice 1.3.** *Montrer les assertions suivantes. (Vous rédigerez complètement les preuves qui sont très courtes.)*

- *Deux droites distinctes ont au plus un point commun.*
- *Pour toute droite $d$ il existe un point $P$ tel que $P$ et $d$ ne soient pas incidents.*
- *Pour tout point $P$ il existe une droite $d$ telle que $P$ et $d$ ne soient pas incidents.*

Deux droites sans point commun sont dites parallèles.

**Axiome P.** Par un point $P$ non situé sur une droite $d$ passe une unique parallèle à $d$.

**Exercice 1.4.** *Qu'est ce qu'une relation binaire sur un ensemble ? Qu'est ce qu'une relation d'équivalence ?*
*Montrer que la relation sur $\Delta$ : $d$ et $d'$ sont parallèles ou confondues, est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalences pour cette relations sont les* directions

**Théorème 1.1.** *Les axiomes* **I.1**, **I.3** *et* **P** *impliquent que toutes les droites ont même cardinalité.*

Le théorème précédent montre que **I.1**, **I.3** et **P** impliquent **I.2**. Certaines géométries ne demande pas que l'axiome **P** soit vérifié alors que toutes nécessitent **I.2**.

## 2. Les axiomes d'ordre

Ils régissent les propriétés de la relation "être entre" pour des points alignés. Soient $A$, $B$ deux points distincts. On notera $]AB[$ l'ensemble des points entre $A$ et $B$, c'est une partie de la droite $(AB)$. On notera $[AB] = ]AB[ \cup \{A, B\}$ le segment entre $A$ et $B$.

**Axiome O.1** Soient $A$, $B$ deux points distincts. On a $[AB] = [BA] \subset (AB)$.

**Axiome O.2** Si $B$ et $D$ sont deux points distincts alors il existe trois points $A$, $C$ et $E$ de $(BD)$ tels que $B \in ]AD[$, $C \in ]BD[$ et $D \in ]BE[$.

**Axiome O.3** Étant donnés trois points alignés, un et un seul est entre les deux autres.

On dit que deux points $A$ et $B$ sont du même côté d'une droite $d$ si $[AB] \cap d = \emptyset$. Un demi-plan ouvert defini par une droite $d$ est l'ensemble des points d'un même coté de $d$. Pour montrer qu'une droite partage le plan en deux demi-plan, nous avons besoin d'un axiome supplémentaire.

**Axiome O.4** Étant donnés trois points $A$, $B$ et $C$ hors d'une droite $d$ on a :
- Si $A$ et $B$ sont du même côté de $d$ et $B$ et $C$ aussi alors $A$ et $C$ sont du même côté.
- Si $A$ et $B$ sont de part et d'autre de $d$ et $B$ et $C$ aussi alors $A$ et $C$ sont du même côté.

**Exercice 2.1.** *Montrez qu'une droite partage le plan en deux demi-plans disjoints.*

Ces axiomes permettent de définir une partie convexe : $F \subset \Pi$ est convexe si $A \in F$ et $B \in F$ impliquent $[AB] \subset F$.

**Exercice 2.2.** *Montrez qu'une intersection de convexes est convexe.*

Ils permettent de définir une demi-droite d'origine $A$ et contenant $B$ :

$$[AB) = \{C \in \Pi \text{ tel que } C \in [AB] \text{ ou } B \in [AC]\}.$$

**Exercice 2.3.** *Montrez que si $A \in ]BC[$ alors $(BC) = [AB) \cup [AC)$, $[BA) = [BC)$ et $[BC] = [AB] \cup [AC]$.*

**Théorème 2.1** (de Pasch)**.** *Soient $A$, $B$ et $C$ trois points non alignés et $d$ une droite coupant $]AB[$ alors une seule des trois situations se produit : $d$ passe par $C$ ou $d$ coupe $]AC[$ ou $d$ coupe $]BC[$.*

Ces axiomes permettent aussi de définir les angles géométriques. Soient $O$ un point du plan et $[OA)$, $[OB)$ deux demi-droites issues de $O$. Supposons les trois points non alignés. On note $H_A^+$ le demi-plan ouvert limité par $(OA)$ contenant $B$ et $H_A^-$ le demi-plan fermé opposé. On note de même $H_B^+$ et $H_B^-$ les demi-plans limités par $(OB)$.

La réunion des deux demi-droites délimite un angle saillant $H_A^+ \cap H_B^+$, noté $\widehat{AOB}$ et un un angle rentrant $H_A^- \cup H_B^-$, noté $(AOB)^\vee$.

**Exercice 2.4.** *Montrer qu'un angle saillant est convexe et qu'un angle rentrant n'est pas convexe.*

Par abus de langage nous dirons que deux demi-droites confondues déterminent un angle saillant "nul" qui se réduit à cette demi-droite et un angle rentrant "plein" qui est le plan. Lorsque les demi-droites sont opposées nous dirons d'un demi-plan délimité par la droite $(AB)$ qu'il forme un angle "plat".

**Exercice 2.5.** *Expliquer pourquoi, dans les deux cas ci-dessus, on ne peut pas utiliser la définition d'angle géométriques donnée précédemment.*

**Exercice 2.6.** *Montrer que par un point intérieur à un angle (non nul, non plein, non plat) $\widehat{AOB}$ passe une droite coupant les deux côtés $[OA)$ et $[OB)$ de l'angle. (Utiliser une ou deux fois le théorème de Pasch pour trouver un point et une droite qui conviennent puis l'axiome* P *pour trouver la droite convenant à un point donné.)*

On peut aussi définir et démontrer des propositions un peu moins évidente de la géométrie.

**Exercice 2.7.** *Définir les termes de la proposition suivante et la démontrer. Les diagonales d'un quadrilatère convexe se coupent à l'intérieur de ce polygone*

**Exercice 2.8.** *Soient $A$, $B$, $C$, $O$ quatre points ne contenant pas un triplet aligné. Montrer qu'une des trois demi-droite $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ coupe un côté du triangle $ABC$ entre ces extrémités (i.e. coupe $]AB[$, $]AC[$ ou $]CB[$).*

## 3. Les axiomes de congruence

Ces axiomes permettent de définir les longueurs des segments et les ouvertures des angles implicitement.

On notera $[AB] \equiv [A'B']$ pour dire que les segment sont congruents (*i.e.* interprétable par "ont même longueur") ; la même notation sera utilisée pour les angles.

**Axiome C.1** Soient $A$, $B$ deux points et $[A'C')$ une demi-droite. Il existe un unique point $B' \in [A'C')$ tel que $[AB] \equiv [A'B']$.

**Axiome C.2** La congruence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des segments.

**Axiome C.3** Si $B \in [AC]$, $B' \in [A'C']$, $[AB] \equiv [A'B']$ et $[BC] \equiv [B'C']$ alors $[AC] \equiv [A'C']$.

**Axiome C.4** Soient $\widehat{AOB}$ un angle et $[O'A')$ une demi-droite et $H$ un demi-plan délimitée par $(O'A')$. Il existe une unique demi-droite $[OB') \subset H$ tel que $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$.

**Axiome C.5** La congruence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des angles.

**Axiome C.6** Si deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont tels que $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$, $[AB] \equiv [A'B']$ et $[AC] \equiv [A'C']$ alors $[CB] \equiv [C'B']$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ et $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$. (On dit que les triangles sont congruents).

**Exercice 3.1.** *Montrer que des angles opposés par le sommet sont congruents.*

**Exercice 3.2.** *Montrer que les angles à la base d'un triangle isocèle sont congruent.*

**Exercice 3.3.** *Si $B \in \widehat{AOC}$, $B' \in \widehat{A'O'C'}$, $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ et $\widehat{BOC} \equiv \widehat{B'O'C'}$ alors $\widehat{AOC} \equiv \widehat{A'O'C'}$.*

**Théorème 3.1** (des angles internes-externes)**.** *Soient $d$ et $d'$ deux droites et $t$ une droite distincte intersectant $d$ en $A$ et $d'$ en $B$. Les angles alternes-internes sont congruents si et seulement si $d$ et $d'$ sont parallèles.*

**Théorème 3.2.** *La* somme *des angles d'un triangle est un angle plat.*

On peut maintenant définir un cercle à partir de son centre et d'un de ces points.

**Théorème 3.3** (de l'angle inscrit)**.** *Soit $\Omega$ un point d'un cercle $\mathscr{C}$ de centre $O$. Si $A$ et $B$ sont deux points du cercle distincts de $\Omega$ tels que les angles $\widehat{A\Omega B}$ et $\widehat{AOB}$ intercèptent le même arc alors $2\widehat{A\Omega B} \equiv \widehat{AOB}$.*

On peut aussi définir le milieu d'un segment et un angle droit.

**Théorème 3.4.** *Il existe un unique $M \in [AB]$ tel que $[MA] \equiv [MB]$.*

**Exercice 3.4.** *Définir un angle droit. Montrer l'existence et l'unicité de sa classe de congruence.*

**Exercice 3.5.** *Montrer que deux droites perpendiculaires a une même droite sont parallèles ou confondues.*

**Exercice 3.6.** *Montrer que par un point extérieur à une droite $d$ passe une unique perpendiculaire à $d$.*

## 4. Les axiomes de continuité

Ces axiomes permettent de s'assurer qu'une droite (avec la relation "être entre") est isomorphe à $\mathbb{R}$. On peut ensuite mesurer les longueurs, les ouvertures, les aires etc.

**Axiome d'Archimède** Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux segments. Il existe un entier $n$ et $n$ points $E_1, \dots, E_n$ de la droite $(AB)$ tels que $E_1 = A$, $B \in [E_1, E_n]$ et pour tout $m$ entre 1 et $n-1$, $[CD] \equiv [E_m E_{m+1}]$.

**Exercice 4.1.** *Expliquer comment cet axiome permet de mesurer les longueurs de segments par un nombre réel.*

**Axiome de Dedekind** Si $d$ est une droite et $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ est une partition de $d$ en parties convexes alors il existe un point $O \in d$ tel que $O \in ]A, B[ \subset d$ si et seulement si une extremité est dans $\Sigma_1$ et l'autre dans $\Sigma_2$.

Cet axiome permet de construire un segment de longueur donnée.

## 5. Deux théorèmes

Les axiomes des sections précédentes nous permettent de mesurer les longueurs de lignes polygonales et les aires de polygones en fixant un segment dont la longueur sera l'unité de longueur et en décrétant

- qu'un rectangle de côtés mesurant $a$ et $b$ a une aire mesurant $ab$,
- que l'aire d'un segment et d'un point sont de mesures nulles
- et que la mesure de l'aire de $\mathscr{P} \cup \mathscr{Q}$ est la somme des mesures des aires de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ moins la mesure de l'aire de $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$.

Mais nous ne savons pas définir et mesurer les longueurs de courbes et les aires délimités par des courbes ! Néanmoins nous pouvons déjà démontrer les deux théorèmes suivants dont vous écrirez les énoncés.

**Théorème 5.1** (de Pythagore)**.**

**Théorème 5.2** (de Thalès)**.**

À partir de maintenant nous fixons un segment unité et un angle unité. Par abus de langage, nous confondrons les longueurs et les ouvertures avec leurs mesures