Réduction d'endomorphismes

Questions de cours pour le lundi 11 mars

Démontrer le lemme et la proposition suivants.

Lemme (des noyaux). *Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension fini et $u : E \to E$ un endomorphisme. Notons P, Q deux polynômes premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$. On a*

$$\ker(P(u)Q(u)) = \ker P(u) \oplus \ker Q(u)$$

Proposition. *Pour qu'un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel soit diagonalisable il faut et il suffit que son polynôme minimal n'ait que des racines simples.*

Donner un exemple d'endomorphisme non diagonalisable.

Exercice 1. *Déterminer explicitement tous les triplets de suites réelles $((u_n), (v_n), (w_n))$ vérifiant les récurrences :*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 4u_n - 3v_n + 9w_n \\ v_{n+1} &= -3u_n + 4v_n - 9w_n \\ w_{n+1} &= -3u_n + 3v_n - 8w_n \end{cases}$$

Exercice 2. *Réduire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné dans la base canonique par une matrice de la forme* $\begin{bmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 3. *Soient a, b, c trois nombres réels. Donner explicitement la solution du système différentiel*

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

vérifiant $x(0) = y(0) = -z(0) = 1$.

Indication : on vérifiera que $a + b + c$, $a + bj + cj^2$ et $a + bj^2 + cj$ sont des valeurs propres complexes de la matrice.

Exercice 4. *Montrer que deux endomorphismes diagonalisables commutent si et seulemet si ils sont diagonalisables dans une même base.*

Exercice 5. *Soient $u : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme annulateur de u. Donner $\ker P(u)$. Montrer que toute valeur propre de u est une racine de P. En déduire que si $P(0) \neq 0$ alors u est un isomorphisme. Que dire d'un endomorphisme u vérifiant $u^3 = 0$? Que dire d'un endomorphisme u vérifiant $u^3 + 2u^2 + u = 0$?*

Exercice 6. *Soit $u : E \to E$ un endomorphisme diagonalisable ayant deux valeurs propres λ_1 et λ_2 de sous-espaces propres E_1 et E_2. Notons p_1 (resp. p_2) la projection sur E_1 (resp. E_2) parallèlement à E_2 (resp. E_1). Calculer $p_1 + p_2$, $p_1 \circ p_2$, $p_2 \circ p_1$ et $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$. Quel est le polynôme minimal de u.*

Exercice 7. *Déterminer toutes les matrices carrés dont le carré est l'identité.*

Exercice 8. *Déterminer toutes les matrices carrés 2×2 dont le carré est nul.*

Exercice 9. *Soit A une matrice carré d'ordre n de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Quelles sont les valeurs propres de A^2 ? Si A est symétrique, calculer $\sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ en fonction de ces coefficients.*

Formes quadratiques

Questions de cours pour le lundi 11 mars

Définir la forme quadratique d'une forme bilinéaire et la forme polaire d'une forme quadratique.
Montrer par la méthode de Gauss que toute forme quadratique admet une base orthogonale.

Exercice 10. *Décomposer en carrés la forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2t^2 - 2xy + 2xz - 2xt + 2yz - 4yt$. Donner son rang, sa signature et sa forme polaire.*

Exercice 11. *Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires sur E. Montrer que $q : E \to \mathbb{R}$; $e \mapsto \ell_1(e)\ell_2(e)$ est une forme quadratique sur E. Donner son rang, sa signature et sa forme polaire.*

Exercice 12. *Soit $B : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$; $(A, B) \mapsto tr(AB)$. Montrer que cette application est une application bilinéaire symétrique. Donner son rang et son noyau.*

Exercice 13. *Soient $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel réel des polynômes en une indéterminée et pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}[x]_k$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à k. Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[x])^2$ on définit $\langle P|Q\rangle$ par $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$.*

(1) *Montrez que $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.*
(2) *Donnez une base orthogonale de $\mathbb{R}[x]_3$*
(3) *Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}[x]$ telle que P_n soit de degré n. Montrez que*

$$\frac{dP_n}{dx} = \sum_{i=0}^{n-1}\big(P_n(1)P_i(1) - P_n(-1)P_i(-1)\big)P_i.$$

Exercice 14. *Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[x])^2$, on note $P \bullet Q$ l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}dx$ et $\frac{d^n}{dx^n}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[x]$ dérivant n fois un polynôme.*

- *Montrer que la formule ci-dessus définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[x]$.*
- *Trouver une base orthonormée du sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égale à deux.*
- *Calculer l'adjoint de $\frac{d}{dx}$ pour ce produit scalaire et en déduire celui de $\frac{d^n}{dx^n}$.*
- *Montrer que l'image de l'endomorphisme $\sum(-1)^k\binom{n}{k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$ est orthogonale à $\mathbb{R}[x]_{n-1}$.*

Exercice 15. *Montrer que* $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ *est la matrice d'une rotation d'un espace euclidien de dimension trois dans une base orthonormée dont on précisera l'axe et l'angle.*

Exercice 16. *Considérons l'endomorphisme d'un espace euclidien de dimension trois donné dans une base orthonormée par la matrice* $\begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{6} & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{6} & 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}$.

Décrivez géométriquement cet endomorphisme.

Exercice 17. *Décrire l'endomorphisme d'un espace euclidien donné dans une base orthonormée par la matrice $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ donnée par $a_{i,j} = 1$ pour $i - j \equiv 1 \mod n$ et 0 sinon.*

Exercice 18. *Décrire l'endomorphisme d'un espace euclidien donné dans une base orthonormée par la matrice $A = [a_{i,j}]_{1\le i,j\le n}$ donnée par $a_{i,j} = 1$ pour $i + j = n$ et 0 sinon.*