Courbes paramétrées

Exercice 1. *Étudier les courbes paramétrées suivantes :*

$$\mathscr{C}_0 : \begin{cases} x(t) = t + \dfrac{1}{t^2} \\ y(t) = t^2 - \dfrac{1}{t} \end{cases} \qquad \mathscr{C}_1 : \begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^4 - 4t^2 \end{cases}$$

$$\mathscr{C}_2 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{2t+1}{t(t+1)} \\ y(t) = \dfrac{t^3+3t+1}{t(t+1)^2} \end{cases} \qquad \mathscr{C}_3 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+t-2}{t^2-2t} \\ y(t) = \dfrac{t^2+t-2}{t-2} \end{cases}$$

Exercice 2. *Étudier les courbes paramétrées suivantes :*

$$\textit{Astroïde} : \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} ; \qquad \textit{???oïde} : \begin{cases} x(t) = \sin(2t)(1+\cos t) \\ y(t) = \cos(2t) \end{cases}$$

$$\textit{Nephroïde} : \begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos(3t)) \\ y(t) = 3\sin t - \sin(3t) \end{cases}$$

Exercice 3. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan de courbure κ constante. Écrire les équations de Frénet de la courbe. En déduire que γ est un arc de cercle ou un segment.*

Exercice 4. *Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée du plan. On appele centre de courbure de γ au temps t le point $\Omega(t) = \gamma(t) + \frac{N(t)}{\kappa(t)}$ où $(\gamma(t), T(t), N(t))$ est le repère de Frénet et κ est la courbure. La courbe paramétrée par Ω s'appelle la développé de γ*

Montrez que la développé d'une cycloïde est une cycloïde.

Exercice 5. *Calculez le repère de Frénet de l'hélice :*

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}$$

Donnez sa courbure et sa torsion.