Coniques II

Dans tous les exercices de la feuille, on se placera sur un plan euclidien.

Exercice 1. *Étant donné un cercle $\mathscr{C}$, donner une construction d'un cercle orthogonal à $\mathscr{C}$. Comment construire un cercle orthogonal à $\mathscr{C}$ de même rayon ?*

Exercice 2. *La symétrie orthogonale par rapport à une droite D sera notée S_D.*

Soit $\mathscr{E}$ une ellipse non dégénérée d'axe focal Δ. On considère sur $\mathscr{E}$ deux points distincts M et $M' = S_\Delta(M)$ tels que les tangentes à $\mathscr{E}$ en ces points (notées respectivement T et T') soient sécantes en O.

(1) *Montrer que $O \in \Delta$.* [1pt]
(2) *Construire un cercle $\mathscr{C}$ orthogonal à $\mathscr{E}$ en M et M'.* [1pt]
(3) *Construire une parabole orthogonale à $\mathscr{E}$ en M et M'.* [2pts]

Nous noterons P le point de Δ vérifiant $PM = PO$. Soit $G \in]PO[$ et H le point d'intersection de $S_T((MG))$ et $S_{T'}((M'G))$.

(4) *Montrer que P existe.* [1pt]
(5) *Montrer que H existe et appartient à la demi-droite de Δ délimitée par O ne contenant pas G.* [2pts]

Soit $\mathscr{C}_G$ l'ellipse de foyer G et H passant par M.

(6) *Montrer que $\mathscr{C}_G$ existe et est unique.* [1pt]
(7) *Montrer que $\mathscr{C}_G$ passe par M'.* [1pt]
(8) *Montrer que $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{E}$ sont orthogonales en M et M'.* [1pt]
(9) *Que se passe-t-il lorsque G se rapproche de O ?* [1pt]
(10) *Que se passe-t-il lorsque G se rapproche de P ?* [0pt]

On supposera dans la suite que M, M' et G ne sont pas alignés. On note F le point d'intersection de $(M'G)$ et (MH) et F' le point d'intersection de (MG) et $(M'H)$.

(11) *En comparant les angles formés par $((M'G), T)$ et $(MH), T)$ puis les angles formés par de droites $((M'G), T')$, $(MH), T)$, montrer que F et F' existent et sont uniquement déterminés.* [2pts]
(12) *Montrer que $F' = S_\Delta(F)$.* [1pt]

Soit $\overline{\mathscr{C}}_G$ l'ellipse de foyer F et F' passant pas M.

(13) *Montrer que $\overline{\mathscr{C}}_G$ existe et est orthogonale à $\mathscr{E}$ en M et M'.* [2pts]
(14) *Que se passe-t-il lorsque G se rapproche de O ?* [1pt]
(15) *Que se passe-t-il lorsque G se rapproche du segment $[MM']$?* [0pt]

Exercice 3. *Soient A, B, C, D, E cinq points du plan non alignés trois à trois. On veut montrer qu'il existe une unique conique passant par ces cinq points.*

(1) *Montrer que les équations dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des coniques passant par A, B et C sont de la forme*

$$(*) \quad ax(x-1) + by(y-1) + cxy = 0.$$

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées de D et E dans ce repère.

(2) *Écrire le système d'équations linéaires en (a, b, c) pour qu'une équation de la forme $(*)$ s'annule en D et E.*
(3) *Donner le rang de ce système et conclure.*
(4) *Si on choisit cinq points du plan A, B, C, D, E dont trois sont alignés, que peut-on dire de l'existence, de l'unicité et de la forme des coniques passant par ces points ?*

Exercice 4. *Soient $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$ deux ellipses se coupant en quatre points non alignés trois à trois d'équations cartésiennes respectives $E_1(x, y) = 0$ et $E_0(x, y) = 0$ de degré deux.*

(1) *Donner un exemple de telles ellipses $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$*

Pour $t \in \mathbb{R}$ considérons $\mathscr{E}_t$ la courbe d'équation $E_t(x, y) = tE_1(x, y) + (1-t)E_0(x, y) = 0$.

(2) *Montrer que $\mathscr{E}_t$ est une conique passant par les quatres points d'intersections de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$.*
(3) *Si $t \neq t'$ les courbes $\mathscr{E}_t$ et $\mathscr{E}_{t'}$ peuvent-elle se couper en dehors des quatre points d'intersections de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$?*
(4) *$\mathscr{E}_t$ peut-elle être une hyperbole ? une parabole ?*
(5) *Décrire toutes les configurations de droites succeptibles d'être données par une équation $E_t = 0$.*
(6) *La réunion de toutes les courbes $\mathscr{E}_t$ pour $t \in \mathbb{R}$ recouvre-t-elle le plan ?*
(7) *Reprendre l'exercice 2. et construire l'équation d'une ellipse orthogonale à $\mathscr{E}$ en M et M' à partir du cercle de la question (2) et des deux droites orthogonales à $\mathscr{E}$ en M et en M'.*

Exercice 5. *Reprendre la preuve du théorème de Lucas et l'existence d'une unique conique tangente à un triangle en les milieux de ces côtés* [exercice 10. & 11. / Nombres complexes et géométrie].