Coniques

Questions de cours

Donner les définitions cartésiennes, par foyer et directrice et bifocales des coniques.
Ces définitions sont-elles équivalentes ?

Exercice 1. *Tracez les courbes de niveau des formes quadratiques sur $\mathbb{R}^2$ suivantes :*
- $q_1(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ *pour les valeurs* $-1, 0, 1, 4, 9$ *;*
- $q_2(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ *pour les valeurs* $-4, -1, 0, 1, 4$ *;*
- $q_3(x,y) = (x-y)^2$ *pour les valeurs* $-1, 0, 1, 4$.

Exercice 2. *Déterminer les courbes du plan (éventuellement les axes focaux, les sommets et les asymptotes) données par les équations suivantes :*
- $x^2 + 2xy - y^2 + x - y - 1 = 0$
- $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$
- $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 4 = 0$

Exercice 3 (Section plane de cône suivant Appolonius)**.** *Soient a, b, c, d quatres nombres réels avec $c \neq 0$. Quels sont les sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$: $\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2-z^2 = 0\}$, $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = d\}$? En utilisant un repère de Π de la forme $O, \vec{\imath} = (1,0,*), \vec{\jmath} = (0,1,*)$, déterminer une équation de $\mathscr{C} \cap \Pi$ dans Π.*

Exercice 4. *Quelles courbes sont paramétrées par les fonctions suivantes :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ \theta \mapsto (a\cos\theta, b\sin\theta), \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ \theta \mapsto (a\cosh\theta, b\sinh\theta),$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ t \mapsto (a\tfrac{1-t^2}{1+t^2}, b\tfrac{2t}{1+t^2}), \qquad k :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2 \ ; \ t \mapsto (\tfrac{a}{\cos t}, b\tanh t).$$

Exercice 5. *Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $t \mapsto (\frac{P(t)}{Q(t)}, \frac{R(t)}{Q(t)})$ avec P, Q et R des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à deux. Montrer que $\mathscr{C}$ est un arc de conique.*

Exercice 6. *Soit $\mathscr{C}$ une courbe paramétrée par $t \mapsto (P(t), Q(t))$ avec P et Q deux polynômes de degré deux. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P - \lambda Q$ soit de degré inférieur ou égal à un. Si $P - \lambda Q$ est de degré zéro, montrer que $\mathscr{C}$ est inclus dans une droite. Si $P(t) - \lambda Q(t) = at + b$ avec $a \neq 0$, montrer que $(P(\frac{s-b}{a}), Q(\frac{s-b}{a})) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} = (s, \widetilde{Q}(s))$ avec $\widetilde{Q}$ de degré inférieur ou égal à deux. En déduire que $\mathscr{C}$ est une arc de parabole ou de droite.*

Exercice 7. *Soient M_0, M_1 et M_2 trois points du plan. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $M'_0(t)$ le barycentre de $(M_0, (1-t))$ et (M_1, t), $M'_1(t)$ celui de $(M_1, (1-t))$ et (M_2, t) et $M''(t)$ le barycentre de $(M'_0(t), (1-t))$ et $(M'_1(t), t)$. Montrer que $t \mapsto M''(t)$ paramètre un arc de parabole dont la tangente en $M(t)$ est la droite $(M'_1(t)M'_2(t))$.*

Exercice 8. *En utilisant son équation réduite, montrer que la tangente à une parabole $\mathscr{P}$ de foyer F et de directrice Δ en un point M est la bissectrice de $\widehat{FMH}$ où H est le projeté orthogonal de M sur Δ.*

En déduire qu'un rayon lumineux parallèle a l'axe focale de $\mathscr{P}$ et se réflechissant sur $\mathscr{P}$ passe par F

Exercice 9. *Soit $\mathscr{E}$ une ellipse de $\mathbb{R}^2$de foyers F et F' ayant une équation sous forme réduite . En utilisant une paramétrisation $t \mapsto M(t)$ d'un arc de $\mathscr{E}$, calculer de deux manières $\frac{d}{dt}(FM(t) + F'M(t))$. Montrer que la tangente à $\mathscr{E}$ en un point M est la bissectrice extérieur de $\widehat{FMF'}$.*

En déduire que dans un billard elliptique, une boule lancé depuis F passe par F'.

Exercice 10. *Reprendre l'***exercice 11.** *de la feuille* **Nombres complexes et géométrie** *et montrer qu'il existe une unique ellipse inscrite dans un triangle donné et tangente en les milieux des côtés.*

Reprendre le sujet du CAPES externe 1998 "Isogonie et orthologie".

Exercice 11. *Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation sous forme réduite de foyers F et F'. Montrer que la tangente à $\mathscr{H}$ en un point M est la bissectrice de $\widehat{FMF'}$.*