Coniques

Questions de cours à faire pour le lundi 25 mars

Donner les définitions cartésiennes, par foyer et directrice et bifocales des coniques.
Discuter l'équivalence de ces définitions.

Exercice 1. *Tracez les courbes de niveau des formes quadratiques sur* $\mathbb{R}^2$ *suivantes :*
- $q_1(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ *pour les valeurs* $-1, 0, 1, 4, 9$;
- $q_2(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ *pour les valeurs* $-4, -1, 0, 1, 4$;
- $q_3(x,y) = (x-y)^2$ *pour les valeurs* $-1, 0, 1, 4$.

Exercice 2. *Déterminer les courbes du plan (éventuellement les axes focaux, les sommets et les asymptotes) données par les équations suivantes :*
- $x^2 + 2xy - y^2 + x - y - 1 = 0$
- $x^2 - 3xy + 2y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$
- $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 4 = 0$

Exercice 3 (Section plane de cône suivant Appolonius)**.** *Soient* a, b, c, d *quatres nombres réels avec* $c \neq 0$. *Quels sont les sous-ensemble suivant de* $\mathbb{R}^3$: $\mathscr{C} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$, $\Pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = d\}$? *En utilisant un repère de* Π *de la forme* $O, \vec{\imath} = (1, 0, *), \vec{\jmath} = (0, 1, *)$, *déterminer une équation de* $\mathscr{C} \cap \Pi$ *dans* Π.

Exercice 4. *Quelles courbes sont paramétrées par les fonctions suivantes :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ \theta \mapsto (a\cos\theta, b\sin\theta), \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ \theta \mapsto (a\cosh\theta, b\sinh\theta),$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \ ; \ t \mapsto (a\tfrac{1-t^2}{1+t^2}, b\tfrac{2t}{1+t^2}), \qquad k :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}^2 \ ; \ t \mapsto (\tfrac{a}{\cos t}, b\tanh t).$$

Exercice 5. *Soit* $\mathscr{C}$ *une courbe paramétrée par* $t \mapsto (\frac{P(t)}{Q(t)}, \frac{R(t)}{Q(t)})$ *avec* P, Q *et* R *des polynômes de degrés inférieurs ou égaux à deux. Montrer que* $\mathscr{C}$ *est un arc de conique.*

Exercice 6. *Soit* $\mathscr{C}$ *une courbe paramétrée par* $t \mapsto (P(t), Q(t))$ *avec* P *et* Q *deux polynômes de degré deux. Montrer qu'il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que* $P - \lambda Q$ *soit de degré inférieur ou égal à un. Si* $P - \lambda Q$ *est de degré zéro, montrer que* $\mathscr{C}$ *est inclus dans une droite. Si* $P(t) - \lambda Q(t) = at + b$ *avec* $a \neq 0$, *montrer que* $(P(\frac{s-b}{a}), Q(\frac{s-b}{a})) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\lambda & 1 \end{bmatrix} = (s, \widetilde{Q}(s))$ *avec* $\widetilde{Q}$ *de degré inférieur ou égal à deux. En déduire que* $\mathscr{C}$ *est une arc de parabole ou de droite.*

Exercice 7. *Soient* M_0, M_1 *et* M_2 *trois points du plan. Pour* $t \in \mathbb{R}$ *on note* $M_0'(t)$ *le barycentre de* $(M_0, (1-t))$ *et* (M_1, t), $M_1'(t)$ *celui de* $(M_1, (1-t))$ *et* (M_2, t) *et* $M''(t)$ *le barycentre de* $(M_0'(t), (1-t))$ *et* $(M_1'(t), t)$. *Montrer que* $t \mapsto M''(t)$ *paramètre un arc de parabole dont la tangente en* $M(t)$ *est la droite* $(M_1'(t)M_2'(t))$.

Exercice 8. *Soit* $\mathscr{E}$ *une ellipse de* $\mathbb{R}^2$ *de foyers* F *et* F' *ayant une équation sous forme réduite . En utilisant une paramétrisation* $t \mapsto M(t)$ *d'un arc de* $\mathscr{E}$, *calculer de deux manières* $\frac{d}{dt}(FM(t) + F'M(t))$. *Montrer que la tangente à* $\mathscr{E}$ *en un point* M *est la bissectrice extérieur de* $\widehat{FMF'}$.

En déduire que dans un billard elliptique, une boule lancé depuis F *passe par* F'.

Exercice 9. *Soit $\mathscr{H}$ une hyperbole de $\mathbb{R}^2$ ayant une équation sous forme réduite de foyers F et F'. Montrer que la tangente à $\mathscr{H}$ en un point M est la bissectrice de $\widehat{FMF'}$.*

Exercice 10. *Quel est, pour une parabole, l'analogue des résultats obtenu dans les deux exercices précédents ?*

Exercice 11. *Reprendre le sujet du CAPES externe 1998 "Isogonie et orthologie" et montrer qu'il existe une unique ellipse inscrite dans un triangle donné et tangente en les milieux des côtés.*

Exercice 12.

Partie I

Soient A, B, C, D, E cinq points du plan non alignés trois à trois. On veut montrer qu'il existe une unique conique passant par ces cinq points.

(1) *Montrer que les équations dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des coniques passant par A, B et C sont de la forme*

$$(*) \quad ax(x-1) + by(y-1) + cxy = 0.$$

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées de D et E dans ce repère.

(2) *Écrire le système d'équations linéaires en (a, b, c) pour qu'une équation de la forme $(*)$ s'annule en D et E.*

(3) *Donner le rang de ce système et conclure.*

(4) *Si on choisit cinq points du plan A, B, C, D, E dont trois sont alignés, que peut-on dire de l'existence, de l'unicité et de la forme des coniques passant par ces points ?*

Partie II

Soient $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$ deux ellipses se coupant en quatre points non alignés trois à trois d'équations cartésiennes respectives $E_1(x, y) = 0$ et $E_0(x, y) = 0$ de degré deux.

(1) *Donner un exemple de telles ellipses $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$*

Pour $t \in \mathbb{R}$ considérons $\mathscr{E}_t$ la courbe d'équation $E_t(x, y) = tE_1(x, y) + (1-t)E_0(x, y) = 0$.

(2) *Montrer que $\mathscr{E}_t$ est une conique passant par les quatres points d'intersections de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$.*

(3) *Si $t \neq t'$ les courbes $\mathscr{E}_t$ et $\mathscr{E}_{t'}$ peuvent-elle se couper en dehors des quatre points d'intersections de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_0$?*

(4) *$\mathscr{E}_t$ peut-elle être une hyperbole ? une parabole ?*

(5) *Décrire toutes les configurations de droites succeptibles d'être données par une équation $E_t = 0$.*

(6) *La réunion de toutes les courbes $\mathscr{E}_t$ pour $t \in \mathbb{R}$ recouvre-t-elle le plan ?*