

Compter

Exercice 0.1. Montrez que pour un ensemble E , $\#P(E) = \#\{0, 1\}^E$.

Exercice 0.2. Montrez que $\#(E \cup F) = \#E + \#F - \#(E \cap F)$.

Exercice 1.3. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et k . On note F^E l'ensemble des applications de E dans F :

$$F^E = \{f \mid f : E \rightarrow F\}.$$

Quel est le cardinal de F^E ?

Exercice 1.4. Soit E un ensemble de cardinal n (on notera $\#E = n$). On note $P(E)$ l'ensemble des parties de E :

$$P(E) = \{F \mid F \subset E\}.$$

Quel est le cardinal de $P(E)$?

Exercice 1.5. Soient E un ensemble de cardinal n et k un entier. On note

$$\binom{n}{k} = \#\{F \mid F \subset E \text{ et } \#F = k\}.$$

Montrez que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Exercice 1.6. Montrez la formule du crible :

$$\#\bigcup_{i \in \{1, \dots, n\}} A_i = \sum_{J \subset \{1, \dots, n\}} (-1)^{1+\#J} \# \bigcap_{i \in J} A_i$$

Exercice 1.7. Montrez l'identité de Pascal $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Exercice 1.8. Soient n un entier et k, i deux entiers inférieurs à n .

- Comptez le nombre de parties à $k+1$ éléments de $\{1, 2, \dots, n+1\}$ dont le plus grand élément est $i+1$.
- Déduisez-en $\sum_{i=0}^n \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.
- Retrouvez ce résultat par une récurrence.
- Montrez que $\sum_{i=0}^n \binom{m+i}{i} = \binom{m+n+1}{n}$.

Exercice 1.9. Montrez l'identité de Vandermonde

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{r}{k} \binom{s}{n-k}.$$

Déduisez-en que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$. Que dire de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^3$?

Exercice 1.10. Soient m et n deux entiers. On note $L(m, n)$ le nombre de chemins du plan $\mathbb{R}^2$ joignant $(0, 0)$ à (m, n) en se déplaçant vers l'est (translation de $(+1, 0)$) ou vers le nord (translation de $(0, +1)$).

- Montrez que $L(m, n) = \binom{m+n}{n}$.
- Déduisez-en l'identité de Pascal.
- Déduisez-en l'identité de Vandermonde.

Exercice 1.11. On considère n points du plan 3 à 3 non alignés tels que les droites définies par ces points ne soient pas 3 à 3 concourantes en d'autres points ni 2 à 2 parallèles.

- Combien de droites peut-on tracer avec ces points ?
- Calculer le nombre de points d'intersections de ces droites.

Exercice 2.12. Considérons le carrée $C = [0, n] \times [0, n]$ dans $\mathbb{R}^2$.

- Comptez le nombre de points à coordonnées entières dans C .
- Comptez le nombre de points à coordonnées entières dans C ... encore.
- Déduisez-en que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2.13. Modifiez l'exercice précédent pour calculer $\sum_{i=1}^n i^2$, $\sum_{i=1}^n i^3$ etc. en comptant.

Exercice 2.14. Soient $0 \leq k \leq n$ deux entiers. Comptez de deux manières le nombre de couples (x, P) où P est une partie de $\{1, 2, \dots, n\}$ de cardinal k et $x \in P$ et montrez que $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 2.15. Soit E un ensemble de cardinal n . Comptez deux fois le cardinal de $P(E)$ et déduisez-en que $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n$.

Exercice 2.16. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs n et k et $R \subset E \times F$. Pour $e \in E$ on note $g(e) = \#\{f \in F | (e, f) \in R\}$ et pour $f \in F$ on note $d(f) = \#\{e \in E | (e, f) \in R\}$.

- Montrez que $\sum_{e \in E} g(e) = \sum_{f \in F} d(f)$.

Voici une application. Pour $n \in \mathbb{N}$ non nul, note $M(n)$ le nombre moyen de diviseur d'un nombre inférieur à n . On veut montrez que $M(n) \sim \ln(n)$.

- Soit $R = \{(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2 \mid i \text{ divise } j\}$. Vérifiez que $M(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d(j)$.
- Calculez $g(i)$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- Déduisez-en l'équivalence voulue.

Exercice 3.17. Montrez que dans une classe de 27 élèves au moins deux ont un nom commençant par la même lettre.

Exercice 3.18. Pour $n \in \{1, 2, \dots, 200\}$ on note $R(n)$ le reste de la division de n par 7. Montrez qu'il existe une valeur prise par $R(n)$ au moins 29 fois.

Exercice 3.19. Montrez que dans une suite de $n^2 + 1$ nombres il existe une sous-suite monotone de $n + 1$ nombres.

Exercice 3.20. On colorie chaque point du plan à coordonnées entières en bleu ou en rouge. Montrez qu'il existe un rectangle dont les quatres sommets sont de la même couleur.

Exercice 3.21. Considérons un graphe complet à 6 sommets, c'est-à-dire que chaque sommet est relié à chaque autre sommet par une et une seule arête. On colorie chaque arête en bleu ou en rouge. Montrer que le graphe contient un triangle bleu ou un triangle rouge.

À FAIRE POUR LE JEUDI 13 SEPTEMBRE 18:00

Exercice 4.22. Démontrez la formule du binôme de Newton et utilisez-les pour redémontrez les identités binomiales ci-dessus et en donner de nouvelles.

Exercice 4.23. Le nombre de dérangements de l'ensemble $E_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ est

$$D_n = \#\{\sigma \mid \sigma : E_n \rightarrow E_n \text{ bijective telle que pour tout } i \in E_n \sigma(i) \neq i\}$$

- Calculez D_1 , D_2 , D_3 et D_4 .
- Montrez que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.
- Pour $i \in E_n$ on pose $A_i = \{\sigma \mid \sigma : E_n \rightarrow E_n \text{ est bijective et } \sigma(i) = i\}$.
Si $J \subset E_n$, calculez $\# \bigcap_{i \in J} A_i$

En utilisant la formule du crible, montrez que $D_n = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$.

- En posant $D_0 = 1$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} D_n \frac{z^n}{n!} = \frac{e^{-z}}{1-z}$,
- En déduire que pour $n \geq 3$ $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$.