Nombres complexes et géométrie

On se place sur le plan euclidien Π muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On notera par des majuscules les points et par les minuscules correpondantes leurs affixes.

Question de cours

Décrire suivant les valeurs de $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ l'application $f : \Pi \to \Pi$; $M \mapsto f(M)$ qui induit l'application $m \mapsto am + b$ sur les affixes.

Regarder les chapitres 1, 5, 6 et 9 de `http://www.dimensions-math.org/Dim_tour.htm`.

Exercice 1. *Reprendre les exercices 15 et 16 de la feuille* $\mathbb{C}$.

Exercice 2. *Montrer que trois points distincts A, B, C sont alignés si et seulement si le rapport $\frac{a-b}{a-c}$ est réel.*

Exercice 3. *Montrer que quatre points distincts A, B, C, D sont alignés ou cocycliques si et seulement si le birrapport*

$$bir(a, b, c, d) = \frac{a-b}{a-c} / \frac{d-b}{d-c}$$

est réel. Donnez l'ensemble des points Z tels que 1, z, $\frac{1}{z}$ et $1 - z$ soient les affixes de points alignés ou cocycliques.

Exercice 4. *À toute matrice $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SL_2(\mathbb{C})$ on associe une application h_M définie par $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ avec z un nombre complexe et H_M l'application du plan induite.*

(1) *Donner le domaine et l'image de h_M. Calculer $(h_M)^{-1}$ lorsqu'elle existe et $h_{M_1} \circ h_{M_2}$.*
(2) *Montrer que les images par H_M de quatres points alignés ou cocycliques sont quatres points alignés ou cocycliques. Quelle est l'image d'un cercle par H_M ?*
(3) *Déterminer les points fixes de h_M.*

On supposera dans la suite que M est telle que h_M n'a un seul point fixe. Il sera noté z_1.

(4) *Déterminer $P \in SL_2(\mathbb{C})$ tel que $\lim_{z \to \infty} h_P(z) = z_1$.*
(5) *Vérifiez que $(h_P)^{-1} \circ h_M \circ h_P$ induit une translation du plan.*

On notera $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence à partir de $u_0 \in Dom(h_M)$ par $u_{n+1} = h_M(u_n)$.

(6) *Cette suite converge-t-elle ? Si oui donnez sa limite en fonction des coefficients de M et de u_0.*

Exercice 5. *Étudier à l'aide des nombres complexes le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.*

Exercice 6. *Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, H son orthocentre et G sont centre de gravité. Montrer que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. En déduire que O, H et G sont alignés.*

Exercice 7. *Soit ABC un triangle. Traduire sur a, b, c le fait que ABC soit équilatéral, qu'il soit rectangle isocèle en A puis qu'il soit rectangle en A.*

Exercice 8. *Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*; z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. Décrire géométriquement cette application.*

Exercice 9. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; z \mapsto \exp iz$. Calculer $\mathcal{R}e(f(z))$, $\mathcal{I}m(f(z))$, $|f(z)|$ ainsi que* $\arg(f(z))$. *Soit $\mathscr{E} = \{M \in \Pi \mid |\Re(m)| \leq 1$ et $|\Im(m)| = 1\}$. Décrire l'image de $\mathscr{E}$ par la transformation du plan induite par f.*

Exercice 10. *Soit $P \in \mathbb{C}[x]$ un polynôme de racines $m_1, \dots, m_k$ ayant pour multiplicité $n_1, \dots, n_k$.*

(1) *Montrer que dans $\mathbb{C}(X)$*
$$\frac{P'(X)}{P(X)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{X - m_i}.$$
(2) *Montrer que si m est une racine de P' mais pas une racine de P alors*
$$\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{|m - m_i|^2}(m - m_i) = 0$$
(3) *Montrer que les points d'affixes les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des points d'affixes les racines de P.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynome de degré pair.
On note x (resp. y) la plus petite (resp. la plus grande) racine réelle de $P'(X)$.

(4) *Pourquoi x et y existent-ils ?*
(5) *Montrer que P admet une racine complexe de partie réelle plus petite de x ainsi qu'une racine complexe de partie réelle plus grande que y.*

Exercice 11. *Reprenons le début de l'exercice précédent dans le cas d'un polynôme de degré 3. Nous aurons besoin d'un résultat sur les ellipses :*
La tangente en un point M à une ellipse de foyers Ω_1 et Ω_2 est la bissectrice extérieur de $\widehat{\Omega_1 M \Omega_2}$.
Soit $P(X) = (X - m_1)(X - m_2)(X - m_3)$ un polynôme dont les racines sont distinctes.

(1) *Montrer que $P'(X)$ a une racine double ω si et seulement si $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral de centre Ω.*

On suppose maintenant que le triangle $M_1M_2M_3$ n'est ni équilatéral ni aplati.
On note ω_1 et ω_2 les deux racines complexes de P' et M_{12} le milieu de $[M_1M_2]$.

(2) *Montrer qu'il existe une ellipse $\mathscr{E}$ de foyer Ω_1 et Ω_2 passant par M_{12}*
(3) *Montrer que*
$3(X - \omega_1)(X - \omega_2) = (X - m_1)(X - m_2) + (X - m_1)(X - m_3) + (X - m_3)(X - m_2).$
(4) *En déduire que*
$$12\frac{\omega_1 - m_{12}}{m_1 - m_2} = \frac{m_2 - m_1}{\omega_2 - m_{12}}$$
puis que (M_1M_2) est tangente à $\mathscr{E}$.
(5) *Montrer que*
$$3\frac{\omega_2 - m_1}{m_3 - m_1} = \frac{m_2 - m_1}{\omega_1 - m_1}.$$
En déduire (M_1M_3) est tangente à $\mathscr{E}$.
(6) *Y-a-t-il d'autres tangentes à $\mathscr{E}$ passant par M_1 ?*

Exercice 12. *Soient z_i, $i = 1, \dots, n$ les n racines complexes de l'unité.*

(1) *Montrer que les points Z_i, $i = 1, \dots, n$ forment un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.*
(2) *Soit j une racine cubique primitive de l'unité. Donner $\Re(j)$ et $|j|$, en déduire une construction d'un 3-gone régulier (i.e. un triangle équilatérale).*
(3) *Étant donné un n-gone régulier, comment construit-on un $2n$-gone régulier ?*

Comment construire un pentagone régulier ? Soit ζ une racine cinquième primitive de l'unité.

(4) *Montrer que $1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4 = 0$. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.*
(5) *Construire un segment de longueur $\frac{\sqrt{5}}{4}$ à la règle et au compas.*
(6) *Déterminer l'intersection du cercle de centre d'affixe $-1/4$ et de rayon $\sqrt{5}/4$ avec l'axe des abscisses. Conclure.*

Théorème 1 (Gauss). *Soient n et m deux entiers naturels premiers entre eux. Le polygone à nm côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si les polygones à n côtès et à m côtès sont constructibles.*

Théorème 2 (Gauss). *Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 3, α un entier. Alors le polygone régulier à p^α côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si $\alpha = 1$ et p est un nombre de Fermat, i.e. p est de la forme $2^{2^i} + 1$, avec i un entier.*

Comment construire un polygone régulier à 17 côtés ?
