$\mathbb{C}$

À FAIRE POUR LE LUNDI 28 FÉVRIER

Écrire un cours sur les nombres complexes donnant toutes les définitions et propositions nécessaires pour faire les dix premiers exercices ci-dessous.

Exercice 1. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$a = (2 + 3i)(4 - 5i)2i, \quad b = (2 - 3i)^4, \quad c = \frac{7 + 5i}{(4 - 3i)^2}, \quad d = \frac{2 - 3i}{i - 5}, \quad e \text{ tel que } e^2 = 5 + 4i,$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} \quad u_n = (1 + i)^n, \quad v_n = \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$(2 + i)z + 3 - 2i = 0, \quad (2 + i)z + (3 - 2i)\bar{z} = 4, \quad (1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = 4i.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}; z \mapsto z^2 + 4\bar{z}$. Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}), \quad \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = 1\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) \in \mathbb{R}\}, \quad \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}.$$

Exercice 4. Soit f une fonction qui, à un nombre complexe z , associe $f(z) = \frac{z + \bar{z} - i}{z - i\bar{z}}$.

- (1) Déterminer le domaine de définition de f . Il sera noté $\text{Dom}(f)$.
- (2) Déterminer $\{z \in \text{Dom}(f) \mid f(z) \in i\mathbb{R}\}$.

Exercice 5. Déterminer les module, argument, partie réelle et imaginaire de $\frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}$.

En déduire les solutions réelles de l'équation $(\sqrt{3} + 1)\cos x + (\sqrt{3} - 1)\sin x = \sqrt{6}$.

Exercice 6. Résoudre l'équation en $z \in \mathbb{C} : z^n = a$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 7. Résoudre l'équation : $(z + 2i)^{10} = (z - 2i)^{10}$. Montrer que les solutions sont toutes réelles et les exprimer à l'aide de la fonction $\tan$.

Exercice 8. Factoriser $X^6 - 1$ et $X^6 + 1$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Résoudre $\sum_{k=0}^n z^k = 0$.

Exercice 10. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (2 + i)z^2 + 3 - 2i = 0, & \quad iz^2 + 2z + i = 0, & \quad 2z^2 + 4iz - 2 - i = 0, \\ (1 - i)z^2 - (6 - 4i)z + 9 - 7i = 0, & \quad z^2 + (1 - i)z + (2 + i) = 0. \end{aligned}$$

Exercice 11. On considère le polynôme $P(X) = 5X^4 - 24X^3 + 42X^2 - 24X + 5$.

- (1) Montrez que si z est une racine complexe de P alors $\bar{z}$ et $\frac{1}{z}$ le sont aussi.
- (2) Calculer $P(2 + i)$. En déduire une factorisation de P sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations $z^2 - (4 + i)z + 5 - i = 0$ et $z^2 - (4 - i)z + 5 + i = 0$. En déduire une factorisation sur $\mathbb{R}$ du polynôme $(X^2 - 4X + 5)^2 + (X + 1)^2$.

Exercice 13. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$ converge. On note e^z sa limite.

Vérifier que $e^{z+w} = e^z + e^w$ et en déduire la formule de Moivre.

Donner une autre démonstration de la formule de Moivre.

Exercice 14. Donner des exemples d'exercices de linéarisation des puissances du cosinus ou du sinus et des applications au calcul d'intégrales et de primitives.