Arithmétique 1

Questions de cours

Montrez l'existence de la division euclidienne.

Montrez l'existence de l'écriture d'un nombre entier en base $b \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

En déduire qu'un nombre est divisible par b si et seulement si son écriture en base b se finit par 10.

---

1. Divisibilité dans $\mathbb{N}$ et numération

Exercice 1.1. *Soient $a > b$ deux nombres entiers. Montrez que le reste r de la division de a par b est toujours strictement inférieur à $\frac{a}{2}$.*

Exercice 1.2. *Montrez que le quotient de u par vw est le quotient par w du quotient de u par v.*

Exercice 1.3. *Pour quels couples d'entiers (a, b) a-t-on égalité entre le quotient et le reste de la division de a par b et ceux de $a + 52$ par $b + 4$?*

Exercice 1.4. *Montrez que l'écriture en base huit du carré d'un nombre impaire se finit toujours par* 1.

Exercice 1.5. *Montrez qu'aucun carré ne se finit par* 2 *en base dix.*

Exercice 1.6. *Montrez les critères de divibilité par 9 et par 11 portant sur l'écriture décimale. Généralisez les pour l'écriture en base b.*

2. Divisibilité et congruence

Exercice 2.1. *Toutes les congruences de cet exercice sont modulo* 6.

(1) *Déterminez un polynôme f de degré deux à coefficients entier positif plus petit que* 5 *tel que* $\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) \equiv 0$.

(2) *Déterminez quatre entiers relatifs a, b, c, d deux à deux distincts et plus petits que* 5 *tels que*
$$\forall x \in \mathbb{Z}\ (x - a)(x - b) \equiv (x - c)(x - d).$$

(3) *Donnez un polynôme f monic de degré* 3 *tel que* $\forall x \in \mathbb{Z}\ f(x) \equiv 0$.

(4) *Montrez que pour tout polynôme f il existe un polynôme g tel que $f - (x^3 - x)g$ soit un polynôme de degré inférieur à deux.*

(5) *Déduisez-en qu'il n'existe pas de polynôme f tel que $f(x) \equiv 1, \forall x \in 6\mathbb{Z}$ et $f(x) \equiv 0$ si $x \in \mathbb{Z} - 6\mathbb{Z}$.*

(6) *Refaites cet exercice en remplaçant* 6 *par* 5 *puis* 7.

Exercice 2.2. *Calculez les résidus de*

– $32^{48} \mod 7$,
– $1111111^3 \mod 5$,
– $5^{3n} - 6^n \mod 17$ *pour* $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2.3.

(1) *Montrez que pour tout entier n les nombres $n^2 + 5n + 4$ et $n^2 + 3n + 2$ sont divisibles par $n + 1$.*

(2) *Déterminez* $\{n \in \mathbb{N} \mid n + 1 \text{ divise } 3n^2 + 15n + 19\}$.

(3) *Déterminez* $\{n \in \mathbb{N} \mid n^2 + 3n + 2 \text{ divise } 3n^2 + 15n + 19\}$.

Exercice 2.4. *On veut résoudre l'équation $3(a^2 + b^2) + 2ab = 664$ avec a et b deux entiers. Soit (a, b) une solution.*

(1) *Montrez $a - b$ et $a + b$ sont pairs.*

(2) *Montrez que $a - b$ est divisible par* 4 *mais pas $a + b$.*

(3) *Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation.*

3. Nombres premiers

Exercice 3.1. *Le nombre* 1999 *est-il premier ?*

Exercice 3.2. *Donnez deux preuves de l'existence d'une infinité de nombres premiers.*

Exercice 3.3. *Factorisez* $x^4 + 4y^4$. *Déduisez-en que le seul premier* p *s'écrivant* $p = x^4 + 4y^4$ *avec* x *et* y *deux entiers est* 5.

Exercice 3.4.

(1) *Montrer que pour tout premier* p *et tout entier* k *vérifiant* $1 \leq k \leq p-1$ *on a* $\binom{p}{k} \equiv 0 \mod p$.
(2) *En déduire que pour tout couple d'entier* (a, b) *et tout premier* p *on a* $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$.
(3) *Montrer que pour tout entier* a *et tout premier* p *on a* $a^p \equiv a \mod p$.
(4) *Montrer que pour tout premier* p *et tout entier* a *non divisible par* p *on a* $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

Exercice 3.5. *Montrez le théorème suivant.*

Théorème 3.1. *Pour tout nombre entier* $n \in \mathbb{N}$, *il existe une unique suite finie de nombre premier* $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_h$ *telle que* $n = \Pi_{i=1}^{h} p_i$.

Exercice 3.6 (Nombres de Mersenne)**.** *Montrez que tout premier de la forme* $a^m - 1$ *avec* $a > 1$ *et* $m > 1$ *est de la forme* $2^p - 1$ *où* p *est un nombre premier. Donnez un nombre premier* p *tel que* $2^p - 1$ *ne soit pas premier.*

Exercice 3.7 (Nombres de Fermat)**.** *Montrez que tout premier de la forme* $a^m + 1$ *avec* $a > 1$ *et* $m > 1$ *est de la forme* $a^{2^n} + 1$ *où* a *est un nombre pair. On note* F_n *le nombre* $2^{2^n} + 1$.

- *Montrez que* F_n *divise* $2^{F_n - 1} - 1$.
- *Montrez que* $\Pi_{i=0}^{n} F_i = F_{n+1} - 2$.
- *Déduisez-en qu'il existe une infinité de nombre premier.*
- *Donnez un entier* n *tel que* F_n *se soit pas premier.*

Pour le jeudi 20 septembre

Nous voulons étudier la somme des inverses de tous les nombres premiers : $\displaystyle\sum_{p \text{ premier}} \frac{1}{p}$. Soit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant. Supposons que la série $\sum \frac{1}{p_i}$ converge et choisissons $k \in \mathbb{N}$ tel que $\displaystyle\sum_{i \geq k+1} \frac{1}{p_i} < \frac{1}{2}$. Soient $N \in \mathbb{N}$, N_b le nombre d'entier naturel inférieur à N divisible par un p_j avec $j > k$ et N_s le nombre d'entiers naturel inférieur à N dont tous les diviseurs premiers sont des p_j avec $j \leq k$.

(1) Montrez que $N = N_b + N_s$.

Evaluation de N_b.

(2) Montrez qu'il y a $\left[\frac{N}{p_i}\right]$ nombres inférieur à N multiple de p_i.
(3) Déduisez-en que $N_b \leq \displaystyle\sum_{i \geq k+1} \left[\frac{N}{p_i}\right] < \frac{N}{2}$.

Evaluation de N_s.

(4) Montrez que tout nombre n s'écrit sous la forme $n = ab^2$ où a n'est divisible par aucun carré et est appelé la partie sans carré de n.
(5) Montrez qu'il y a 2^k nombres sans carré dont tous les diviseurs premiers sont des p_j avec $j \leq k$ et moins de $\sqrt{N}$ carré inférieur à N.
(6) Déduisez-en que $N_s \leq 2^k \sqrt{N}$
(7) Donnez un nombre N donnant une contradiction.