Théorème de Perron-Frobenius

Questions de cours

Donner une preuve du théorème de Perron : *Si $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ est à coefficients strictement positifs alors elle admet une valeurs propre simple positive λ majorant les modules de toutes les autres valeurs propres et un vecteur propre associé à coefficients strictement positifs.*

Donner l'énoncé du théorème de Frobenius généralisant le théorème ci-dessus.

Définir un graphe, un graphe orienté, un graphe pondéré ...

Notations. *Soit $P \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Nous noterons $P \geq 0$ si $p_{ij} \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ et $P > 0$ si les inégalités sont toutes strictes. Nous dirons que $P \geq Q$ (resp. $P > Q$) si $P - Q \geq 0$ (resp. $P - Q > 0$).*

Exercice 1. *Montrer que l'ensemble des matrices positives est un sous-ensemble convexe de l'ensemble des matrices. Est-il vrai que toute matrice $n \times n$ a un carré positif ? Est-il vrai que le produit de deux matrices positives est positif ?*

Exercice 2. *Montrer que $P \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ est positive (resp. strictement) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^m$ strictement positif, Px est positif (resp. strictement).*

Exercice 3. *On notera S l'ensemble des matrices stochastiques :*

$$S = \{P \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid P \geq 0, \forall i \sum_j p_{ij} = 1\}.$$

1/ Montrer que S est convexe.
On dit que $P \in S$ est extrémale pour S si il n'existe pas de segment ouvert contenant P et contenu dans S.
2/ Montrer que $P \in S$ est extrémale si et seulement si elle n'a comme coefficients que des 0 et des 1.
Si $P \in S$ et $P^t \in S$ on dit que P est bi-stochastique.
3/ Montrer que l'ensemble bS des matrices bi-stochastiques est convexe.
4/ Montrer que les matrices bi-stochastiques extrémales sont les matrices de permutation.
5/ Montrer l'ensemble des matrices bi-stochastiques est l'enveloppe convexe des matrices de permutation. (difficile)

Exercice 4. *Montrer qu'une matrice stochastique admet 1 comme valeur propre et que les autres valeurs propres ont un module plus petit que 1.*

Si P est une matrice stochastique strictement positive, montrer que $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers xy^t ou x est un vecteur propre de P et $y^t x = 1$.

Si P est une matrice bistochastique strictement positive, montrer que $(P^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers xy^t ou x est un vecteur propre de P et y est un vecteur propre de P^t.

Exercice 5. *Soit $\mathcal{G}$ un graphe orienté ayant un nombre fini de sommet $A_1, \dots A_n$ et un nombre fini d'arêtes. On note $p_{ij} = \frac{\#\{\text{ arêtes allant de } A_i \text{ à } A_j\}}{\#\{\text{ arêtes partant de } A_i\}}$.*

La matrice $P = (p_{ij})_{1\leq ij \leq j}$ est-elle stochastique ? Interpréter $(P^k)_{i,j}$ et $((1+P)^k)_{ij}$ sur $\mathcal{G}$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ positif, interpréter $P^k x$ sur $\mathcal{G}$.

Donner des conditions suffisantes sur $\mathcal{G}$ pour qu'il existe $y \in \mathbb{R}^n$ positif tel que $P^n x \to y$. Que vaut $\sum y_i$? Montrer que $y/\sum y_i$ ne dépend pas de x.

Exercice 6. *En utilisant l'exercice précédent avec $\mathcal{G}$ le graphe dont les sommets sont les pages webs et les arêtes sont les liens, décrire un algorithme pour obtenir le classement des pages suivant la fréquence des visites d'un internautes cliquant sur les liens au hasard (suivant une loi uniforme).*

Le graphe $\mathcal{G}$ vérifie-t-il les hypothèses de l'exercice précedent ?

Soit E est la matrice carré de taille le nombre de sommet de $\mathcal{G}$, de coefficients tous égaux à 1. Montrer que si β est un nombre entre 0 et 1 alors $\beta P + \frac{(1-\beta)}{n}E$ vérifie les hypothèses du théorème de Perron.

Que donne l'algorithme précédent si on remplace P par $\beta P + \frac{(1-\beta)}{n}E$? Le résultat dépent-il de β ?

Exercice 7. *Soient P une matrice strictement positive et λ une valeur propre de vecteur propre strictement positif. Montrer que $\min_i \sum_j p_{ij} \leq \lambda \leq \max_i \sum_j p_{ij}$. Montrer si P est positive et $\max_i \sum_j p_{ij} < 1$ alors il existe $\lambda < 1$ et $c \in \mathbb{R}_{>0}$ tels que $P^n \leq c\lambda^n E$. En déduire sous ses même hypothèses que $Id - P$ est inversible.*

Exercice 8. *Soient $B_1, \dots, B_n$ des biens produits par des usines $U_1, \dots, U_n$ en quantités $b_1, \dots, b_n$. Chaque usine U_i a besoin de $a_{ji}b_i$ produit B_j pour assurer sa production. La demande extérieur de chaque produit U_i se monte à e_i unités. Existe-t-il un régime de production satisfaisant la demande extérieur ?*