UFR Mathématiques — Université Rennes 1

Master 1 / GEA -Géométrie et Algèbre — Printemps 2012

Examen – 2012

Exercice 1. *Soient (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathscr{G}$ un graphe orienté ayant 4 sommets : 1, 2, 3 et 4. On rappelle que la matrice stochastique de $\mathscr{G}$ est P définie par $p_{i,j} = \frac{\#\{\text{arêtes allant de } j \text{ vers } i\}}{\#\{\text{arêtes partant de } j\}}$. Donner la matrice du graphe suivant :*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Calculer P^n pour $n > 1$. Interpréter le résultat sur $\mathscr{G}$.

Exercice 2. *Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, considérons les cinq points P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 de coordonnées respectives $\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\a\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ où a est un nombre réel. On notera $\gamma : t \mapsto \begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\end{bmatrix}$ la courbe de Bézier contrôlée par $(P_0, P_1, P_2, P_3, P_4)$.*

(1) *Comparer $\gamma(t)$ et $\gamma(1-t)$ et donner une symétrie de la courbe.*
(2) *En déduire que $x(1/2) = 0$ et $y'(1/2) = 0$.*
(3) *Vérifier que*

$$\begin{cases} x(t) = 20t^3 - 30t^2 + 12t - 1 \\ y(t) = (a-10)t^4 - 2(a-10)t^3 + (a-18)t^2 + 8t - 1 \end{cases}$$

On notera $\widetilde{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par les deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

(4) *Etudier la courbe et l'esquisser pour $a > 10$.*
(5) *Que se passe-t-il lorsque $a = 10$?*

Exercice 3. *Soit $n \in \mathbb{N}_{>1}$. On notera $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et E la matrice de taille $n \times n$ dont les coefficients sont tous égaux à 1.*

(1) *Déterminer l'image et le noyau de E.*
(2) *Donner les valeurs propres de E. Est-elle diagonalisable ?*

Soit P une matrice de permutation de taille $n \times n$ tel que $P^2 = Id$.

(3) *Montrer que les valeurs propres de P sont dans $\{-1, 1\}$.*
(4) *Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ soit e_i est un vecteur propre de P, soit $e_i + Pe_i$ et $e_i - Pe_i$ sont des vecteurs propres de P. En déduire une base de diagonalisation de P.*
(5) *Montrer que $E + P$ est symétrique et que $\begin{bmatrix}1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de $E + P$ de valeur propre $n + 1$.*
En déduire que si v est un vecteur propre de $E + P$ de valeur propre λ alors soit $\lambda = n + 1$, soit $\begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix} v = 0$.

On notera E_1 et E_{-1} les sous-espaces propres de P de valeurs propres 1 et -1 respectivement.

(6) *Vérifier que $ImE \subset E_1$*
(7) *Calculer EP, en déduire que $E_{-1} \subset \ker E$.*
(8) *Montrer que $\mathbb{R}^n = imE \oplus (E_1 \cap \ker E) \oplus E_{-1}$.*
(9) *Donner les valeurs propres de $E + P$ ainsi qu'une base de diagonalisation.*
(10) *Calculer $(E + P)^{-1}$ en la cherchant sous la forme $\alpha E + P$.*

Exercice 4. *Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation*

$$x^4 + 2y^4 = 4.$$

(1) *Montrer que les axes du repère sont des axes de symétries de $\mathscr{C}$.*
(2) *Donner les coordonnées des points d'intersections de $\mathscr{C}$ avec ces axes.*
(3) *Montrer que $\mathscr{C}$ est incluse dans le carré $[-2, 2] \times [-2, 2]$.*
(4) *$\mathscr{C}$ est-elle une conique ?*

Correction

Exercice 1. La matrice est $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. On a alors $P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Puisque les colonnes de P^3 sont des vecteurs propres de P de valeur propre 1, on a $P^n = P^3$ pour $n > 3$.

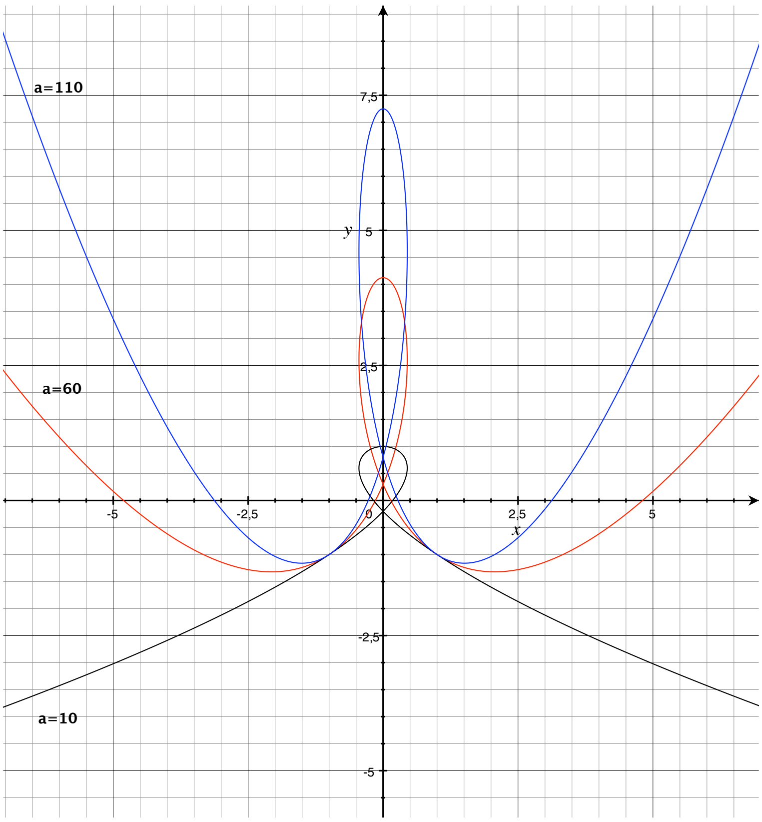
L'interprétation sur $\mathscr{G}$ est la suivante : quelque soit la population placée sur les sommets du graphe et soumise à des déplacements équidistribués suivants les arêtes, toute la population se retrouve sur le sommet associé au vecteur propre de P de valeur propre 1 au bout de trois déplacements car la suite $(P^n)_{n\geq 3}$ est constante.

Exercice 2.
(1) La courbe est donnée par $\gamma(t) = \sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} t^i(1-t)^{4-i}P_i$. On a donc $\gamma(1-t) = \sum_{i=0}^{4} \binom{n}{i} t^i(1-t)^{4-i}P_{4-i}$. On remarque que P_{4-i} est le symétrique de P_i par rapport à l'axe des ordonnées. Les symétries préservant les barycentres, $\gamma(1-t)$ est le symétrique de $\gamma(t)$ et la courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
(2) En évaluant $x(t) = -x(1-t)$ en $t = 1/2$ on obtient la premier égalité. En dérivant $y(t) = y(1-t)$ et en évaluant en $t = 1/2$ on obtient $y'(1/2) = -y'(1/2)$.
(3) Il suffit de remplacer les points par leurs coordonnées et de développer la formule de la question (1). On obtient alors la formule demandée modulo le changement de $6a$ en a, ce qui simplifie la suite des calculs.
(4) En dérivant x on obtient $x'(t) = 60t^2 - 60t + 12 = 60(t - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{20}})(t - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{20}})$. En factorisant directement x on obtient $x(t) = (20t - 10)(t^2 - t + \frac{1}{10}) = (20t - 10)(t - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}})(t - \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}})$.

En dérivant y on obtient $y'(t) = 4(a-10)t^3 - 6(a-10)t^2 + 2(a-18)t + 8 = \big(4(a-10)t - 2(a-10)\big)\big(t^2 - t - \frac{4}{a-10}\big) = \big(4(a-10)t - 2(a-10)\big)\big(t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-6}{a-10}}\big)\big(t - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a-6}{a-10}}\big)$.

Pour dresser le tableau de variation on remarque que puisque $a > 10$, $\frac{a-6}{a-10} > 1$. Comme $y(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{3}{20}}) = y(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{20}})$ la courbe a un point double sur l'axe des ordonnées.

Le degré de $y(t)$ étant supérieur à celui de $x(t)$ la courbe a deux branches paraboliques en $t \to +\infty$ et $t \to -\infty$ de direction l'axe des ordonnées et symétriques par rapport à celui-ci.
(5) lorsque $a = 10$. Le degré de $y(t)$ devient plus petit que celui de $x(t)$ et les branches infinies deviennent paraboliques de direction l'axe des abscisses.



Quelques exemples.

Exercice 3.
(1) Notons $\vec{1}$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont toutes les coordonnées sont égales à 1. Les colonnes de E engendrent imE qui est donc $\mathbb{R}\vec{1}$. Les lignes de E étant toutes identiques on a $\ker E = \{v \in \mathbb{R}^n | \vec{1}^T v = 0\}$.
(2) L'image de E est constituée de vecteurs propres de valeur propre n. Le sous-espace propre de valeur propre n est de dimension supérieure ou égale à 1. Le noyau de E est constitué de vecteur propres de valeur propre 0. Le sous-espace propre de valeur propre 0 est de dimension supérieure ou égale à $n-1$. On a donc égalité dans les inégalités précédentes. L'espace est somme directe des deux sous-espaces propres et E est diagonalisable.
(3) $X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de P, ses valeurs propres sont donc parmi les racines de ce polynôme : $\{-1, 1\}$.
(4) Soit $Pe_i = e_i$ et e_i est un vecteur propre P ; soit $Pe_i \neq e_i$ et dans ce dernier cas $e_i + Pe_i$ est un vecteur propre de valeur propre 1 et $e_i - Pe_i$ est un vecteur propre de valeur propre -1 car il est non nul.
(5) Si $p_{ji} = 1$ alors $Pe_i = e_j$ d'où $Pe_j = e_i$ et $p_{ij} = 1$. P est donc symétrique. E étant aussi symétrique on a $(E+P)^T = E+P$. Un calcul direct montre que $\vec{1}$ est un vecteur propre de $E+P$ de valeur propre $n+1$. Si v est un vecteur propre de $(E+P)$ de valeur propre λ alors $\vec{1}^T(E+P)v = \lambda\vec{1}^T v$. D'un autre coté en transposant l'égalité $(E+P)\vec{1} = (n+1)\vec{1}$ on obtient $\vec{1}^T(E+P)v = (n+1)\vec{1}^T v$.
(6) Puisque $\vec{1}$ engendre imE et $\vec{1} \in E_1$, on a l'inclusion souhaitée.
(7) Un calcul direct donne $EP = E$. Une base de E_{-1} construite en (4) étant de la forme $e_i - Pe_i$, on a $E(e_i - Pe_i) = 0$. Ceci prouve que $E_1 \subset \ker E$.
(8) Nous avons montré en (2) que $\mathbb{R}^n = imE \oplus \ker E$. Nous avons montré en (4) que $\mathbb{R}^n = E_1 \oplus E_{-1}$. Les inclusions précédentes donnent ainsi $\mathbb{R}^n = imE \oplus (E_1 \cap \ker E) \oplus E_{-1}$. Le premier sous-espace est le sous-espace propre associé à la valeur propre $n+1$, le deuxième à la valeur propre 1 et le dernier à la valeur propre -1.
(9) Un calcul direct donne $\alpha = \frac{-1}{n+1}$

Exercice 4.
(1) Si $[x, y]$ est solution de l'équation alors $[-x, y]$ (resp. $[x, -y]$) est aussi solution. L'axe des ordonnées (resp. des abscisses) est donc un axe de symétrie.
(2) Les intersections avec l'axe des abscisses sont les points $[x, 0]$ vérifiant $x^4 = 4$ c'est-à-dire les points $[-\sqrt{2}, 0]$ et $[\sqrt{2}, 0]$. L'intersection avec l'axe des ordonnées est constituée des points $[0, y]$ vérifiant $2y^4 = 4$ c'est-à-dire des points $[0, -\sqrt[4]{2}]$ et $[0, \sqrt[4]{2}]$.
(3) Si $[x, y]$ appartient à la courbe on a $x^4 + 2y^4 = 4$. Puisque $y^4 \geq 0$ on a $x^4 \leq 4$ ce qui implique $|x| \leq \sqrt{2} < 2$. De même puisque $x^4 \geq 0$ on a $|y| \leq \sqrt[4]{2} < 2$.
(4) Si $\mathscr{C}$ est une conique, ce doit être une ellipse car ce sont les seules coniques contenues dans un carré. De plus les axes du repère étant axes de symétrie, son équation réduite est de la forme $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$. Comme nous connaissons les points d'intersection avec les axes du repère, nous avons $a = \sqrt{2}$ et $b = \sqrt[4]{2}$.

Regardons le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec la diagonale $x = y$: on obtient les deux points $[\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, \sqrt[4]{\frac{4}{3}}]$ et $[-\sqrt[4]{\frac{4}{3}}, -\sqrt[4]{\frac{4}{3}}]$. D'un autre coté l'intersection de la courbe d'équation $x^2 + \sqrt{2}y^2 = 2$ avec cette même diagonale est constituée des points $[\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}, \sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}]$ et $[-\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}, -\sqrt{\frac{2}{1+\sqrt{2}}}]$.

Puisque $1 + \sqrt{2} \neq \sqrt{3}$, les deux courbes sont différentes et $\mathscr{C}$ ne peut être une conique.