UFR Mathématiques — Université Rennes 1
Master 1 / GEA -Géométrie et Algèbre — Printemps 2013

Contrôle terminal

mardi 7 mai 2013 ; 14h-18h

Les téléphones, les calculatrices ou autres appareils électroniques sont interdits.

Les réponses devront être soigneusement rédigées.

EXERCICE 1.

(1) *Décrivez les courbes de* $\mathbb{R}^2$ *d'équations* $x^2 + y^2 - 4axy + x = 0$ *dans les cas* $a = 0$ *et* $a = 1$.
(2) *Déterminez les points d'intersections de ces deux courbes.*
(3) *Esquissez ces deux courbes sur un même dessin.*

EXERCICE 2.

Soit E *un espace vectoriel sur* $\mathbb{C}$ *muni d'une base* e_1, e_2, e_3, e_4. *On notera* u *l'endomorphisme défini par* $u(e_1) = e_2$, $u(e_2) = e_3$, $u(e_3) = e_4$ *et* $u(e_4) = e_1$.

(1) *Vérifiez que* $X^4 - 1$ *est un polynôme annulateur de* u.
(2) *Montrez que si* x_1, x_2, x_3, x_4 *et* λ *sont cinq nombres complexes tels que* $\sum_{i=1}^4 x_i e_i$ *soit un vecteur propre de* u *de valeur propre* λ *alors* $\sum_{i=1}^4 \overline{x}_i e_i$ *est un vecteur propre de* u *de valeur propre* $\overline{\lambda}$.
(3) *Déterminez les valeurs propres ainsi qu'une base de vecteur propres de* u.

EXERCICE 3.

Dans cet exercice, nous nous proposons de montrer l'existence de l'ellipse de Steiner d'un triangle (non plat) du plan euclidien orienté Π *et d'en donner une caractérisation complexe. Les parties I et III peuvent être traitées indépendamment des autres.*

Dans tout l'exercice $\mathscr{E}$ *désignera une ellipse de foyers* F_1 *et* F_2 *et de longueur du demi grand axe* a. *Les deux propriétés des ellipses rappelées ci-dessous pourront être utilisées dans l'exercice.*

Rappel 1. $\mathscr{E} = \{M \in \Pi \mid MF_1 + MF_2 = 2a\}$.

Rappel 2. *La droite* (AB) *est tangente à* $\mathscr{E}$ *en* $M \in \,]AB[$ *si et seulement si*

$$\widehat{F_1MA} = \widehat{BMF_2}.$$

Partie I - Un théorème d'Appolonius

Dans cette partie nous démontrons la proposition 46 du Livre 3 des "Coniques" d'Appolonius (262 - 190 av J.C.) :

Théorème 1. *Si A, B et C sont trois points distincts du plan tels que (AB) soit tangente à $\mathscr{E}$ en $M_1 \in]AB[$ et (AC) soit tangente à $\mathscr{E}$ en $M_2 \in]AC[$ alors $\widehat{BAF_1} = \widehat{F_2AC}$.*

On notera H_1 (resp. H_2) le symétrique orthogonal de F_1 (resp. F_2) par rapport à (AB) (resp. (AC)).

(1) *Montrez que $M_1 \in]H_1F_2[$ et $M_2 \in]H_2F_1[$.*
(2) *Montrez que $H_1F_2 = 2a = H_2F_1$.*
(3) *Montrez que les triangles H_1AF_2 et F_1AH_2 sont isométriques.*
(4) *Déduisez-en le théorème 1.*

Partie II - Deux résultats d'unicité

(1) *Montrez que si deux ellipses ont mêmes foyers et un point commun alors elles sont confondues.*
(2) *Montrez que si deux ellipses ont mêmes foyers et une tangente commune (en des points a priori différents) alors elles sont confondues.*

Partie III - L'ellipse de Steiner

Soit ABC un triangle non plat du plan.

(1) *Montrez que dans un triangle équilatéral il existe une unique ellipse tangente aux trois cotés en leurs milieux.*
(2) *Montrez qu'il existe une application affine du plan telle que l'image de ABC soit un triangle équilatéral.*
(3) *Déduisez-en l'existence d'une ellipse tangente aux cotés de ABC en leurs milieux.*
(4) *Montrez que cette ellipse est unique. On la nomme ellipse de Steiner du triangle.*

Partie IV - Construction complexe des foyers de l'ellipse de Steiner

Dans cette partie on choisira un repère orthonormé direct du plan pour identifier celui-ci au plan complexe. Les points seront nommés avec des majuscules et les affixes correspondantes avec des minuscules.

Soit ABC un triangle non aplati. Considérons le polynôme

$$P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$$

et ω_1, ω_2 les deux racines de $P'(X)$. On notera B' (resp. C') le milieu de $[AC]$ (resp. $[AB]$) et $\mathscr{E}_B$ (resp. $\mathscr{E}_C$) l'ellipse de foyers Ω_1 et Ω_2 passant par B' (resp C').

(1) *Montrez que $\omega_1 = \omega_2$ si et seulement ABC est équilatéral et Ω_1 en est le centre.*
(2) *Calculez $3\omega_1\omega_2$ et $3(\omega_1+\omega_2)$ en fonction de a, b et c.*
(3) *Montrez que $(\omega_2 - \frac{a+b}{2})(\omega_1 - \frac{a+b}{2}) = -\frac{1}{12}(a-b)^2$.*
(4) *Déduisez-en que $\mathscr{E}_C$ est tangente à $[AB]$ en C'.*
(5) *Montrez que $3(a-\omega_1)(a-\omega_2) = (a-b)(a-c)$.*
(6) *Déduisez-en que $\mathscr{E}_C$ est tangente à $[AC]$.*
(7) *Montrez que Ω_1 et Ω_2 sont les foyers de l'ellipse de Steiner.*